

Les représentations planes de la Terre

■ Françoise DUQUENNE

Depuis l'antiquité on sait que la Terre est ronde ou presque. Cependant il s'avère depuis toujours très pratique d'en faire une représentation plane, que ce soit sur du papier ou de nos jours sur un écran d'ordinateur. On appelle très souvent ces représentations planes de la Terre des "projections cartographiques", terminologie associée à "carte", voire à "plan cartésien". Remarquons ici qu'elles ne sont pas toutes des projections au sens mathématique et géométrique du terme. Il existe de nombreuses représentations planes et nous nous proposons ici, non pas d'en faire un inventaire mais de présenter leurs caractéristiques, de voir comment on peut les classer et comment on les choisit selon leur utilisation.

MOTS-CLÉS

Représentations planes, module linéaire, altération linéaire, conforme, équivalente, cylindrique, conique, indicatrice de Tissot

Qu'est-ce qu'une représentation plane de la Terre

On choisit tout d'abord une forme géométrique approchée de la Terre débarrassée de ses reliefs. Lorsque l'on veut faire une représentation à très petite échelle (par exemple 1/100 000 000) on choisit une sphère, tandis que pour les cartes à moyennes et grandes échelles on utilise un ellipsoïde de révolution. Leurs dimensions proches de 6 400 km pour le rayon d'une sphère et un aplatissement proche de 1/300 pour un ellipsoïde, diffèrent de plusieurs centaines de mètres. Historiquement quelques sphères (sphère de Picard : $R=6371598$ m) et de nombreux ellipsoïdes (Clarke, Hayford, Bessel, Krakovski...) ont été utilisés. La tendance actuelle est de choisir quelle que soit l'échelle de la carte l'ellipsoïde WGS84 ou ce qui est équivalent à mieux que le millimètre l'ellipsoïde international GRS80.

Un point de la Terre qui est sur la surface topographique est repéré par ses coordonnées géographiques : longitude (λ), latitude (ϕ) et hauteur (h).

La première étape consiste à projeter le point sur l'ellipsoïde en un point M_0 qui a les mêmes longitude et latitude que le point M .

La deuxième étape est une transformation de l'ellipsoïde en plan, en réalisant une application qui à toutes coordonnées (λ, ϕ) du point fait correspondre des coordonnées du plan cartésien (x, y). L'application réciproque existe. En général l'expression mathématique est de la forme

$$\begin{aligned} x &= f(\lambda, \phi) \\ y &= g(\lambda, \phi) \end{aligned}$$

Remarque : le plus souvent, mais pas systématiquement, l'axe x est dirigé vers l'Est et y vers le Nord et les coordonnées (x, y) se notent aussi (E, N) pour *easting* et *northing*.

Ces fonctions peuvent être très compliquées mais aussi très simples comme par exemple la représentation plate carrée (Figure 4) qui était déjà utilisée par Eratosthène (273-192 av. J.-C.) bien que la latitude et longitude n'étaient pas utilisées à cette époque.

$$\begin{aligned} x &= a\lambda \quad \text{où } a \text{ est le rayon de la sphère} \\ y &= a\phi \quad \text{représentant la Terre} \end{aligned}$$

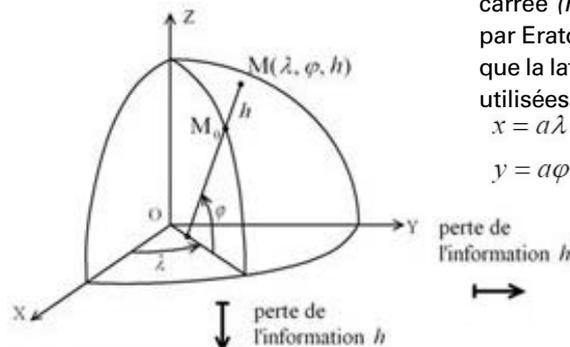
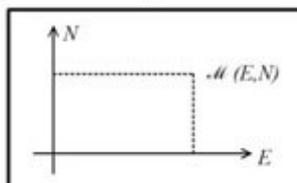


Figure 1. Principe d'une représentation plane



Les déformations

Toute projection d'un ellipsoïde sur un plan induit des déformations. On peut prendre comme image un ballon de baudruche que l'on essaie d'aplatir sur une table et que l'on va étirer pour arriver au résultat, alors on déforme mais pas de la même façon partout. Autre analogie la peau d'une orange que l'on veut aplatir sur la table, et qui va se déchirer jusqu'à ce que les morceaux puissent être aplatés avec des déformations très petites et non déchirantes. Pour représenter la Terre entière, donc à des échelles très petites, on va plutôt procéder comme pour le ballon de baudruche, tandis que pour les grandes ou moyennes échelles (ex. : 1/5 000, 1/25 000, etc.) on va découper la Terre en zones, correspondant à un continent, un pays, à des zones plus petites délimitées par des méridiens et des parallèles. Pour chacune de ces zones, on définira une projection et ses paramètres qui feront le moins de déformation.

Les longueurs sont toujours altérées car la sphère ou l'ellipsoïde ne sont pas développables sur un plan et pour quantifier cette déformation on introduit le **module linéaire** : $\mu = \frac{dS}{ds}$

Avec ds élément de longueur infinitésimal sur l'ellipsoïde et dS l'élément correspondant sur le plan.

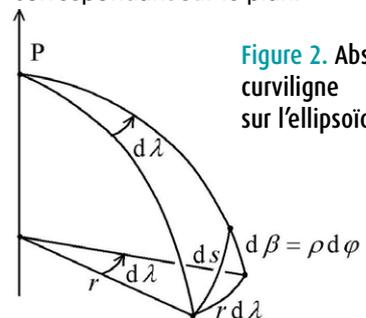


Figure 2. Abscisse curviligne sur l'ellipsoïde

$$ds^2 = r^2 d\lambda^2 + \rho^2 d\phi^2$$

r : rayon du parallèle

$$r = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \cos \phi$$

ρ : rayon de courbure du méridien

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \phi)^{3/2}}$$

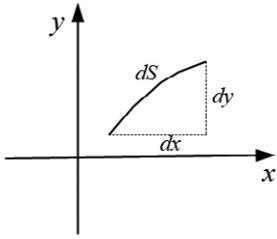


Figure 3. Abscisse curviligne sur le plan

$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

$$dx = \frac{\partial f(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial f(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$dy = \frac{\partial g(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial g(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$dS^2 = \left(\left(\frac{\partial f(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \right)^2 + \left(\frac{\partial g(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \right)^2 \right) d\lambda^2$$

$$+ \left(\left(\frac{\partial f(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial g(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \right) d\varphi^2$$

$$+ 2 \left(\frac{\partial f(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \times \frac{\partial f(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right) d\lambda d\varphi$$

$$+ 2 \left(\frac{\partial g(\lambda, \varphi)}{\partial \lambda} \times \frac{\partial g(\lambda, \varphi)}{\partial \varphi} \right) d\lambda d\varphi$$

Le module linéaire $\mu = \sqrt{\frac{dS^2}{ds^2}}$

est donc une fonction de (λ, φ) qui dépend de la position du point et de la direction dans laquelle on regarde la déformation.

En un point de coordonnées (λ, φ) varie entre deux valeurs : $\mu_1 < \mu < \mu_2$. La valeur maximale μ_2 peut être infinie ∞ .

On appelle altération linéaire la quantité $\varepsilon = \mu - 1$ exprimée souvent en mètres par kilomètres.

On appelle **isomètre** une courbe telle qu'en tout point $\mu = \text{constante}$. Si $\mu = 1$ elle est dite **automécoïque**.

Pour visualiser les déformations on utilise l'indicatrice de Tissot. On trace sur l'ellipsoïde un petit cercle de rayon 1 (l'unité importe peu), la transformée de ce cercle par la représentation plane est toujours une ellipse de demi-grand axe μ_2 et de demi-petit axe μ_1 , c'est l'**indicatrice de Tissot**. Les représentations pour lesquelles $\mu_1 = \mu_2$ en tout point sont dites conformes, l'indicatrice de Tissot est un cercle. Elles ont deux intérêts, le premier c'est que l'altération linéaire en un point est la même dans toutes les directions, et le deuxième les angles sont conservés dans la transformation.

Les représentations pour lesquelles $\mu_1 \mu_2 = 1$ en tout point sont dites équivalentes. Elles conservent les surfaces car la surface de l'ellipse $\pi \mu_1 \mu_2 = \pi$ est égale à la surface du cercle de rayon 1. Les représentations qui ne sont ni conformes, ni équivalentes sont dites **aphylactiques**.

Les figures 4, 5, 6 et 7 montrent des exemples de projections pour lesquelles on voit les images des méridiens et de parallèles et au croisement on a figuré les indicatrices de Tissot.

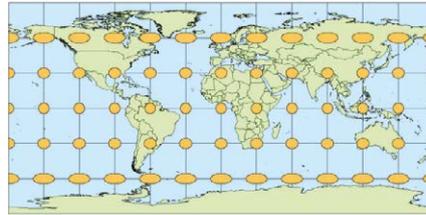


Figure 4. Plate carrée : cylindrique équidistante

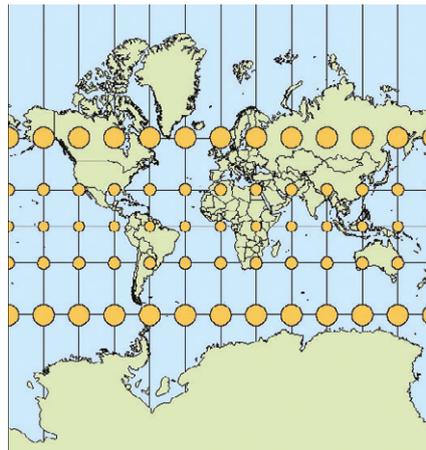


Figure 5. Mercator : cylindrique conforme

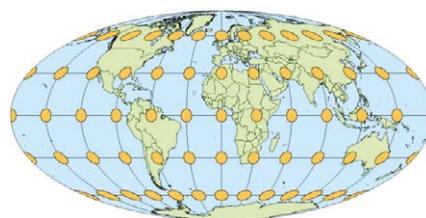


Figure 6. Mollweide : méri-cylindrique

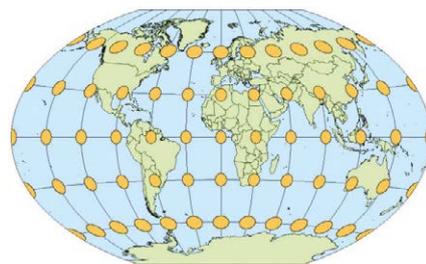


Figure 7. Winkel-Tripel

Ainsi on voit que pour la projection "plate carrée" (Figure 4), sur l'équateur l'indicatrice de Tissot est un cercle, puis en se déplaçant vers les pôles l'indicatrice de Tissot s'aplatit et s'élargit, il y a une dilatation des zones polaires. Cette projection n'est ni conforme, ni équivalente. Les images des parallèles étant à égale distance on dit qu'elle est **équidistante**. La projection Mercator est un exemple de projection conforme. L'indicatrice de Tissot est un cercle quel que soit le lieu, et ce cercle devient de plus en plus grand quand on se rapproche des pôles. La déformation des longueurs est la même dans toutes les directions en un lieu donné mais son amplitude augmente avec la latitude. Pour la projection de Mollweide (Figure 6) l'indicatrice de Tissot est une ellipse dont le grand axe est dirigé selon l'image du méridien. L'ellipse s'aplatit en s'approchant des pôles mais garde une aire constante. Cette projection est équivalente. Aucune représentation plane de l'ellipsoïde n'est à la fois conforme et équivalente. Par contre on peut comme dans le cas de la projection de Winkel-Tripel faire en sorte que les déformations soient minimisées, ici l'indicatrice est presque un cercle dont l'aire varie peu.

Image du canevas

Les méridiens et les parallèles qui sur la sphère ou sur l'ellipsoïde sont des cercles ou des ellipses peuvent être transformés par la représentation en toutes sortes de courbes. Il est habituel de procéder à une classification des représentations planes selon ces courbes de la manière suivante :

Les représentations cylindriques : les images des parallèles sont des droites parallèles et celles des méridiens des droites parallèles perpendiculaires aux premières (Figure 4, 5, 9).

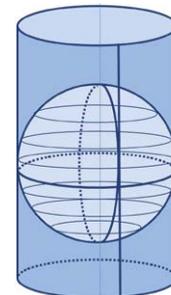


Figure 8. représentation cylindrique [5]

▶ Par analogie, c'est comme si on enveloppait la sphère par un cylindre que l'on déplaçait ensuite, mais attention la transformation n'est pas en général une projection géométrique.

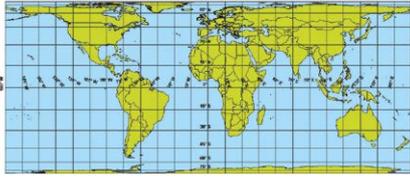


Figure 9. Cylindrique équivalente

Les projections méridiennes (ou pseudo-cylindriques) : les images des parallèles sont des droites parallèles, celles des méridiens sont des courbes (arc de cercle, arc de sinus (Figure 10), arc d'ellipse (Figure 6), etc.)

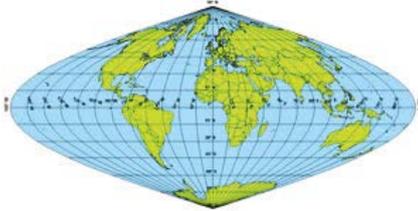


Figure 10. Sanson : méridienne sinusoidale

Les projections coniques : les images des parallèles sont des arcs de cercles concentriques, celles des méridiens sont des droites concourantes au centre des arcs de cercles qui est aussi l'image du pôle (nord ou sud) (Figures 12, 13). Par analogie, c'est comme si on enveloppait la sphère par un cône que l'on déplaçait ensuite, mais attention la transformation n'est pas en général une projection géométrique.

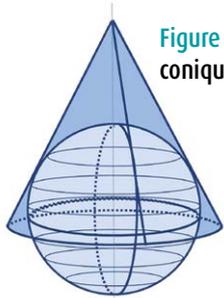


Figure 11. Représentation conique [5]

Figure 12. Conique conforme

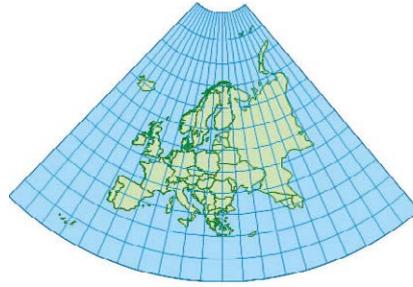


Figure 13. Conique équivalente

Les projections méridiennes (ou pseudo-conique) : les images des parallèles sont des arcs de cercles concentriques, celles des méridiens sont des courbes quelconques passant par l'image du pôle.

Les projections azimutales (cas particulier de conique) : les images des parallèles sont des cercles concentriques, celles des méridiens sont des droites concourantes au centre des arcs de cercles qui est aussi l'image du pôle (nord ou sud) (Figure 15).

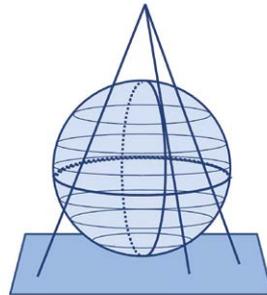


Figure 14. Représentation azimutale [5]

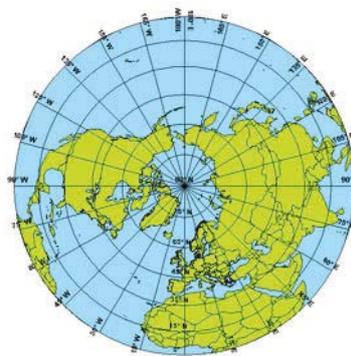


Figure 15. Azimutale équivalente

Les projections poly-coniques : les images des parallèles sont des arcs de cercles non concentriques, dont le centre est situé sur une droite, image du méridien origine, et les images des autres méridiens sont des courbes quelconques (Figure 16)



Figure 16. Polyconique

L'aspect

Pour illustrer l'aspect, prenons l'exemple des projections cylindriques. On dit que la projection est directe lorsque l'axe du cylindre est confondu avec l'axe des pôles, elle est oblique lorsque l'axe du cylindre est incliné selon une direction qu'on appelle axe des pseudo-pôles, et transverse lorsque l'axe du cylindre est dans l'équateur. On associe à l'axe des pseudo-pôles un pseudo-canevas, composé de pseudo-parallèles et pseudo-méridiens. On applique au pseudo-canevas la classification vue précédemment, par exemple pour une projection cylindrique oblique les pseudo-méridiens et pseudo-parallèles seront des droites perpendiculaires les unes aux autres, ce qui n'est pas le cas pour les méridiens et parallèles. Mathématiquement on applique les mêmes fonctions mais en utilisant les pseudo-longitudes et pseudo-latitudes (coordonnées Cassini-Soldner). On peut aussi appliquer l'aspect oblique aux représentations coniques et azimutales.

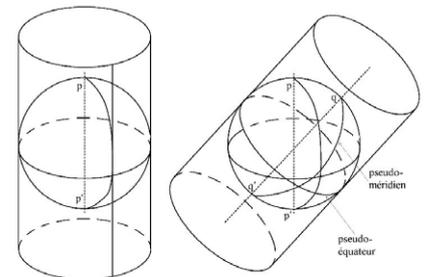


Figure 17. Aspect direct et oblique

On distingue aussi les représentations sécantes et tangentes : en reprenant l'analogie, dans le premier cas le cône ou le cylindre coupe la sphère, et dans

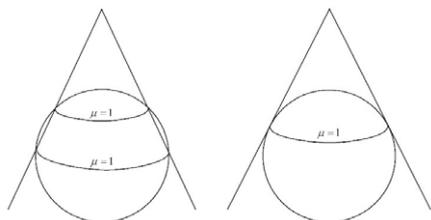


Figure 18. Aspect sécant et tangent

l'autre cas il est tangent. Ce que l'on peut exprimer dans le premier cas, il existe deux isomètres automécoïques ($\mu = 1$) et dans le deuxième il n'y en a qu'une.

Le nom des représentations planes

Certaines représentations peuvent être nommées à l'aide de leurs caractéristiques, comme par exemple la projection conique conforme, mais souvent elles portent le nom de leur inventeur, Lambert pour la même projection. On peut citer les noms fréquemment rencontrés : Aïtoff, Albers, Bonne, Cassini, Eckert, Gauss, Gall, Guillaume Postel, Hammer, Hatt, Goode, Krüger, Laborde, Lorgna, Lambert, Mercator, Miller, Mollweide, Peeters, Sanson, Soldner, Wagner, Winkel. Il est évidemment plus pratique d'utiliser la première méthode de désignation d'une projection, d'autant que plusieurs noms peuvent représenter la même projection, comme par exemple la représentation cylindrique équidistante qui s'appelle Cassini ou Soldner selon le pays. Par ailleurs un même nom peut être utilisé pour des projections différentes, comme Lambert pour les projections coniques conforme et équivalente. Certaines projections sont obtenues par une perspective géométrique sur un plan, un cône ou un cylindre tangent à la sphère, et selon le point de vue qui peut être le centre de la sphère, un pôle, l'infini, elles sont appelées gnomoniques, stéréographiques, ou orthographiques.

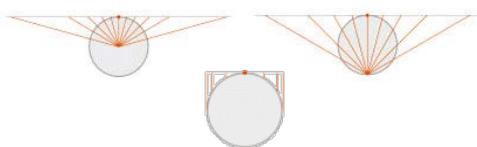


Figure 19. Projections gnomonique, stéréographique, orthographique.

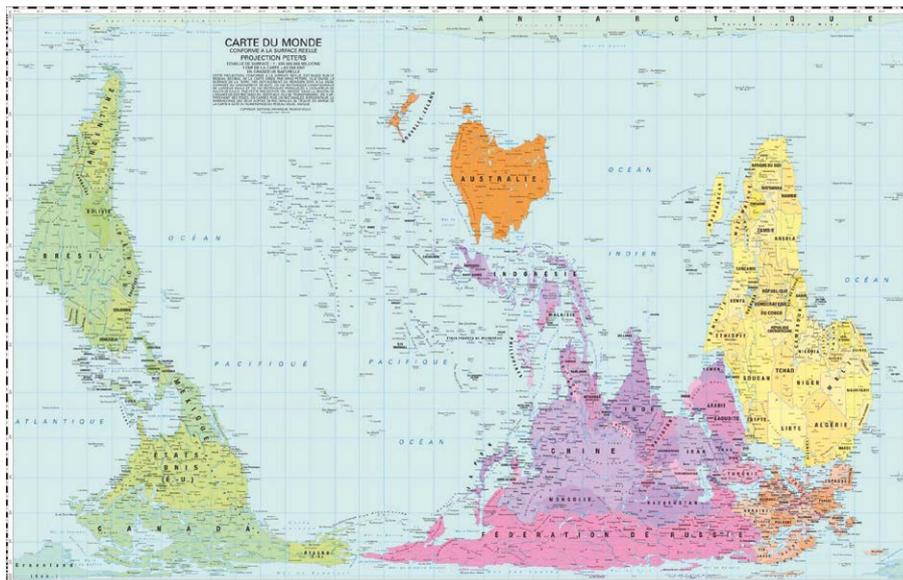


Figure 20. Le Monde 2008 - projection cylindrique équivalente (Peters)

Quelles projections pour quelles applications ?

■ Cartes du monde (Atlas)

Les cartes du monde que l'on trouve dans les Atlas peuvent être choisies selon divers critères. L'esthétique en est un, la projection de Molweide (Figure 6) par exemple est souvent choisie, car sa forme rappelle celle de la Terre, tandis que celle de Sanson (Figure 10) est plus originale. Les projections équivalentes sont très utilisées, car elles respectent

l'importance des pays en superficie et sont très utiles pour des cartes thématiques : par exemple si on représente le nombre d'habitants d'un pays par un cercle dont le rayon dépend de la population, pour avoir une impression de densité réaliste, il faut conserver le rapport des superficies des pays. En général le haut de la carte est vers le nord, mais il existe des cartes ayant le sud en haut. De même le méridien central n'est pas toujours le méridien de Greenwich. La carte du monde (Figure 14) est centrée

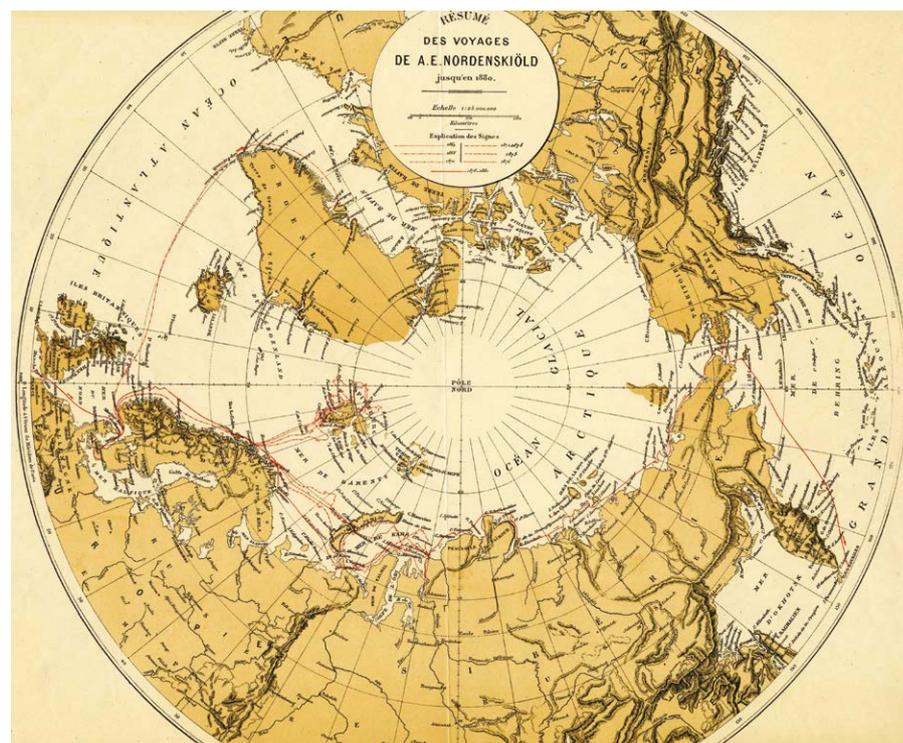


Figure 21. Carte du pôle nord (1880) : projection azimutale



utilisées sont conformes, ce qui permet de conserver les angles mais aussi les longueurs étant déformées de la même façon dans toutes les directions, il est facile de corriger les distances mesurées pour les reporter sur la carte. Les projections les plus utilisées sont la conique conforme, les cylindriques conformes obliques ou transverses, et la projection stéréographique (azimutale conforme) oblique.

Les représentations conformes possèdent des propriétés particulières qui vont faciliter la réduction des observations d'angles et de distances faites sur le terrain

- L'indicatrice de Tissot est un cercle.
- Le module linéaire ne dépend que de la position du point.
- L'altération angulaire est toujours nulle.
- On note μ_0 , la valeur minimale du module linéaire. En un point quelconque on a $\mu_0 \leq \mu \leq \infty$.
- L'isomètre dont le module linéaire vaut μ_0 est choisie au centre de la zone à cartographier et est nommée isomètre centrale.
- On choisit $\mu_0 < 1$ et donc il existe nécessairement des isomètres pour lesquelles $\mu = 1$. Elles sont automécoïques. Au voisinage de l'isomètre centrale, en un point m à distance d de celle-ci, le module linéaire se développe sous la forme :

$$\mu = \mu_0(1 + pd^2 + o(d^2))$$

où p dépend un peu du point m et où $o(d^2)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur à d^2 .

- Soit s la distance séparant deux points m_1 et m_2 de l'ellipsoïde (figure 25). La distance correspondante en plan est S . Si l'arc de courbe sur l'ellipsoïde est une géodésique, son image plane est peu courbée et, sur le plan, on peut confondre la longueur de l'image de la géodésique et la longueur du segment M_1M_2 .

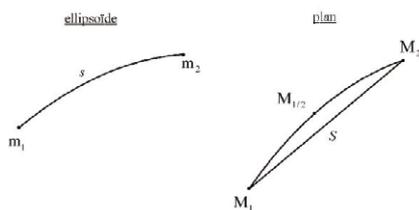


Figure 25. Réduction d'une distance de l'ellipsoïde au plan.

- En toute rigueur, S est donné par l'intégrale curviligne :

$$S = \int_{m_1, m_2} \mu ds$$

- Pour une distance courte (quelques centaines de mètres), μ peut être considéré comme constant :

$$S = \mu s$$

- Pour des distances plus longues, il est nécessaire de calculer une valeur moyenne du module linéaire :

$$S = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} s$$

- Pour les distances très longues (plusieurs dizaines de kilomètres), on utilise la formule des trois niveaux, qui nécessite le calcul du module linéaire aux deux extrémités et au milieu de l'arc de géodésique :

$$S = \frac{\mu_1 + 4\mu_{1/2} + \mu_2}{6} s$$

- Une transformation conforme conserve les angles. Cependant, l'image plane d'une ligne géodésique de l'ellipsoïde n'est en général pas une géodésique du plan (une droite), mais une courbe tournant sa concavité vers l'isomètre centrale (figure 26). Ceci entraîne qu'une petite correction doit être apportée aux angles horizontaux observés avant de les utiliser pour des calculs planimétriques. Sur la partie gauche de la figure 26, l'azimut de la direc-

tion m_1m_2 est considéré comme égal à l'angle entre l'ellipse méridienne vers le nord et la ligne géodésique. En projection conforme, l'azimut est conservé, c'est l'angle entre l'image du méridien et l'image de la géodésique (courbe M_1M_2 sur la partie droite de la figure).

- Pour utiliser les formules classiques de la géométrie plane, il faut corriger l'azimut du petit angle entre l'image de la géodésique et le segment de droite M_1M_2 . Cette correction est notée dV , on l'obtient à partir de ρ_g , rayon de courbure de l'image de la géodésique. Celle-ci tourne sa concavité vers l'isomètre centrale, vers laquelle se trouve donc le centre de courbure C . On appelle isomorphes les courbes orthogonales aux isomètres, et on note S_v leur abscisse curviligne. La distance entre deux isomètres d'équations $\mu = Cste$ et $\mu + d\mu = Cste$ est donc la différentielle de l'abscisse curviligne sur l'isomorphe, dS_v . On désigne par i l'angle entre l'isomorphe et l'image de la géodésique. ρ_g est donné par la formule de Schols :

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial S_v} \sin i \quad (1)$$

- On peut montrer que, comme ρ_g n'est pas rigoureusement constant entre M_1 et M_2 , il convient de le calculer pour le point $M_{1/3}$ situé sur l'image de la géodésique au tiers de M_1M_2 . On a ensuite :

$$dV = \frac{1}{2} \frac{S}{\rho_{g1/3}}$$

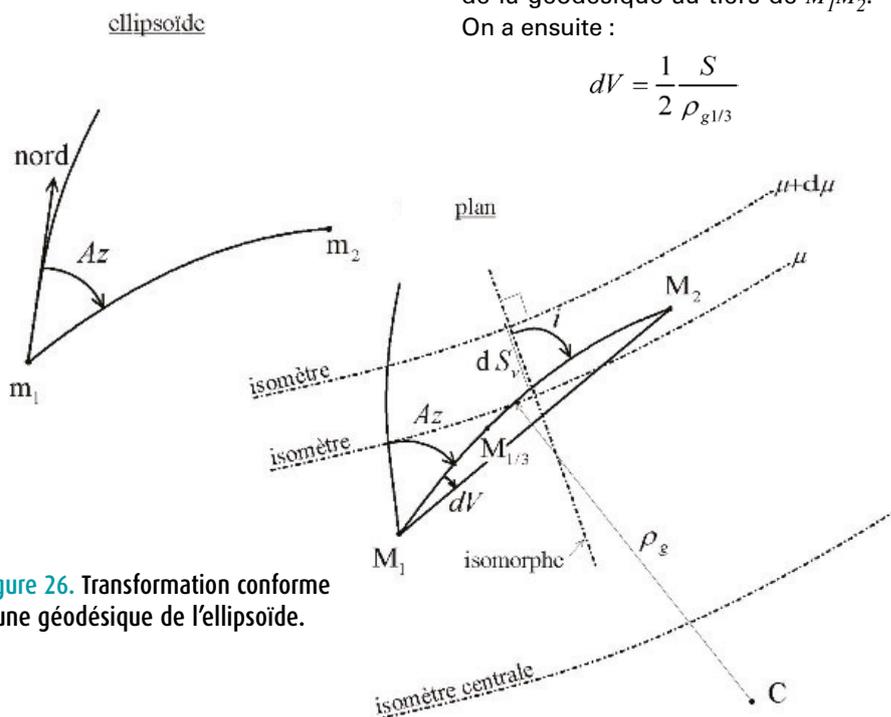


Figure 26. Transformation conforme d'une géodésique de l'ellipsoïde.

– Suivant la précision requise, la projection utilisée, la longueur des visées et l'éloignement de l'isomètre centrale, il convient de contrôler si dV peut être négligé.

■ Convergence des méridiens

Les images des méridiens peuvent être très variées, droites parallèles, droites sécantes, cercles, courbes quelconques. On choisit un méridien origine, comme axe des y, et en un point quelconque l'image du méridien fait un angle γ avec l'axe des y qu'on appelle convergence des méridiens.

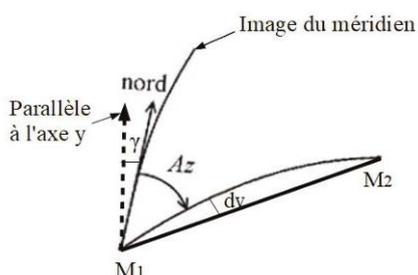


Figure 27. Passage azimut vers gisement

$$V_{M_1M_2} = Az_{M_1M_2} + \gamma + dv$$

$V_{M_1M_2}$: gisement : angle entre l'axe des Y et la direction M_1M_2

$Az_{M_1M_2}$: azimut : angle entre le méridien et la direction M_1M_2

γ : convergence de méridiens = gisement de l'image du méridien.

Conclusion

Ces quelques pages ont résumé les façons les plus répandues de représenter la Terre sur un plan. Cependant il en existe de nombreuses autres et l'imagination n'a pas de limite. On peut prendre ici comme exemple la carte anamorphique de la SNCF qui à la place des distances, utilise la durée des trajets des trains.

Cet article dont le but est une vue générale sur les représentations planes de la Terre sera complété ultérieurement dans la revue XYZ par l'étude détaillée des représentations planes les plus utilisées en topographie et cartographie, en particulier les représentations légales françaises et celles spécifiées dans la directive européenne INSPIRE. ●

Les cartes des figures 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 18, 19, 21 ont été générées par les logiciels et données Mapinfo et Arcgis.

Remerciements à Bernard Bèzes, ex responsable de la cartothèque de l'IGN qui a fourni les cartes de la collection IGN des figures 14, 15, 16, 17.

Références

- [1] Bugayevskiy M. Snyder J., 1995, *Map Projections*, Taylor&Francis
- [2] Duquenne F. et H., 2003, *cours de géodésie*, ESGT, CNAM. <http://www.aftopo.org/FR/ouvrages-34.html>
- [3] Duquenne F., *Les projections cartographiques*, bulletin de liaison des membres de la Société de Géographie n°18, juin 2012.
- [4] Reignier F. 1957, *Les systèmes de projections et leurs applications*, IGN
- [5] www.regard-sur-la-terre.over-blog.com

ABSTRACT

This paper presents a general view of the representations of the Earth onto a plane surface. Both the mathematical characteristics of the projections and their geometric characteristics, including projected images of the meridians and parallels, are highlighted. Then the direct and inverse aspects are explained as well as the classifications by purpose of use, such as world atlas, navigation and surveying. The notions of scale factor, convergence of meridians and reduction to the chord are explained. The paper will be completed in detail within the next issues by the studies of projections mostly used in surveying.

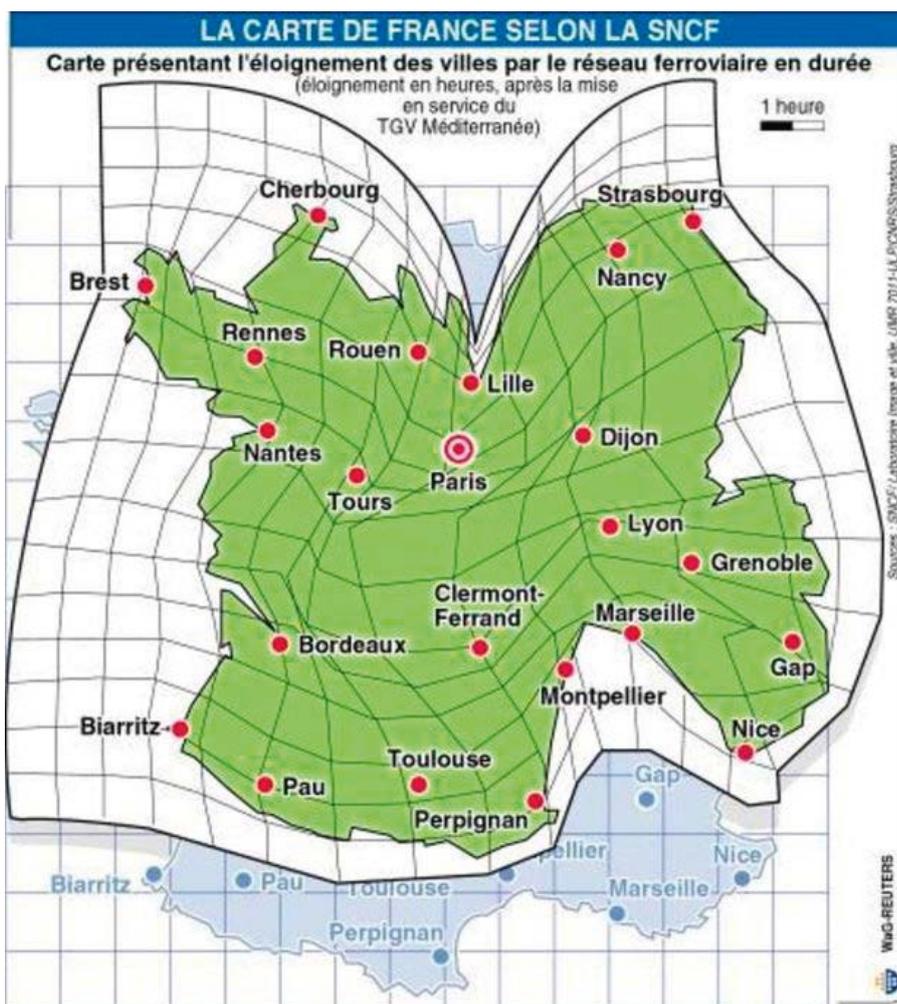


Figure 28. Carte anamorphique de la SNCF