

LES REPRÉSENTATIONS PLANES DE L'ELLIPSOÏDE

Introduction¹

Afin de représenter sur un plan (la carte) une surface non réglée (la surface terrestre), la représentation cartographique de tout ou partie de cette surface terrestre implique le choix d'un modèle géométrique ou mathématique de "projection" minimisant les déformations ou altérations des objets situés sur cette surface. Les mathématiques montrent que plusieurs solutions existent, répondant chacune à un ou plusieurs critères différents. Les cartographes, espiègles de nature, les ont toutes essayées.

Mais bien avant la démarche "géodésique", puisqu'on estime qu'elle a débuté 2 000 ans avant J.C., la **cartographie** était déjà confrontée au problème de la représentation sur une surface plane (la carte) d'une image du monde sphérique. Certes, cette technique s'apparentait à l'origine plus au dessin d'après nature qu'au relevé topographique, car essentiellement destinée au report approximatif de points de repère et de routes pour les marchands ou voyageurs dans l'Antiquité. Et, très tôt là encore, le recours aux mathématiques jeta les bases de la cartographie moderne. Ptolémée établit au début du 2^e siècle (environ 120 après J.C.) une carte du Monde à partir de la conversion des latitudes et longitudes en coordonnées métriques planes. Les représentations planes (ou projections cartographiques) étaient nées. Depuis, utilisant les connaissances apportées par la géodésie, les mathématiciens cartographes ont défini bon nombre de représentations terrestres dont la plus célèbre restera sans doute celle de **Mercator** en l'an 1569.

Le nouveau Décret et l'Arrêté définissent pour les différents territoires de la France métropolitaine et d'outre-mer une ou plusieurs projections. Ce document d'accompagnement présente la théorie qui sous-tend ces constructions mathématiques.

¹ Extraits de « GEODEF GDLIB 3.0 Introduction générale »

Table des matières

LES REPRÉSENTATIONS PLANES DE L'ELLIPSOÏDE	1
Introduction.....	1
Table des matières	2
Notions principales.....	4
Définitions	4
Historique des projections cartographiques	6
Déformation des angles.....	7
Convergence des méridiens :	9
Altération des longueurs :	9
Altération des surfaces :	12
Types de représentations planes :	13
Choix d'utilisation:	13
Classification des projections :	14
Domaines d'utilisation des représentations.....	14
Propriétés des représentations conformes.....	15
Variation des longueurs.....	15
Isomètre centrale	16
Facteur d'échelle :	17
Représentations coniques conformes.....	17
Représentation conique conforme de la NTF : Lambert Zone	17
Propriétés	17
Gisement du méridien	18
Condition de conformité et rayon des parallèles :	19
Coordonnées Rectangulaires.....	19
Module linéaire.	20
Cas d'une projection sécante.	21
Projection adoptées en France métropolitaine.....	21
Représentations coniques conformes du RGF93 : Lambert 93	21
Critères de choix du Lambert-93	22
Représentations coniques conformes du RGF93 : CC 9 Zones.....	26
Critères de choix de la Conique Conforme 9 zones.....	26
Caractéristiques de la 'Conique Conforme 9 zones'	28
Constantes de la représentation	29

FORMULES.....	30
Formulaire	30
Constantes des projections Lambert France (NTF)	30
Lambert zone ► Lambert zone.....	30
Lambert ► coordonnées géographiques.....	31
Coordonnées géographiques ► Lambert	31
Latitude à partir de la latitude isométrique	32
Coordonnées géographiques RGF93 vers CC 9 Zones.....	34
CC 9 Zones vers coordonnées géographiques RGF93	35
REPRÉSENTATIONS CYLINDRIQUES	36
Propriétés (cas des représentations tangentes).....	36
Représentations cylindriques directes:	36
Représentations cylindriques transverses ou obliques.....	37
La représentation Universal Transverse Mercator (UTM) :.....	38
Formulaires :.....	39
Développement de l'arc de méridien.....	39
Transformation de coordonnées : $\lambda, \varphi \Rightarrow E, N$ (formulaire IGN).....	40
Transformation de coordonnées : $\lambda, \varphi \Rightarrow X, Y$ (formulaire simplifié).....	42
Transformation de coordonnées : $X, Y \Rightarrow \lambda, \varphi$	43
Facteur d'échelle k.....	47
Formule générale pour la Mercator Transverse.....	47
Formule pour l'UTM	47
Échelle d'une ligne géodésique	48
Convergence des méridiens	48
Paramètres des projections UTM sur les territoires français :.....	50
Cas particulier de la Guyane française	51
Projection Gauss-Laborde Réunion	52
Constantes de la représentation :	52
REPRÉSENTATIONS STÉRÉOGRAPHIQUES	53
Projection Stéréographique Polaire Sud Terre-Adélie	53
Formulaire	53
LE MOT DE LA FIN	54
Bibliographie.....	55

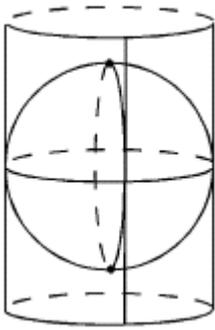
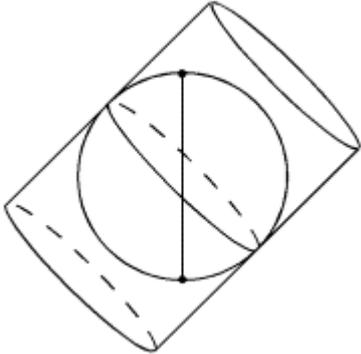
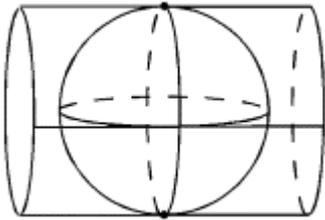
Notions principales

Définitions

On appelle représentation plane un ensemble de lois géométriques ou mathématiques qui permet de représenter sur un plan tout ou partie d'une surface courbe, qui est en général celle de la Terre. Les différentes représentations peuvent être symbolisées comme la représentation de la Terre sur une surface développable (par exemple un cylindre ou un cône) ou sur un plan. Il existe cependant des représentations qui n'entrent pas dans ces classifications.

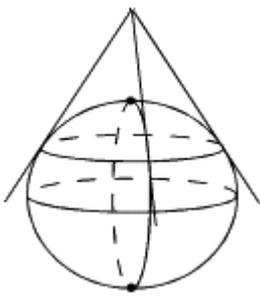
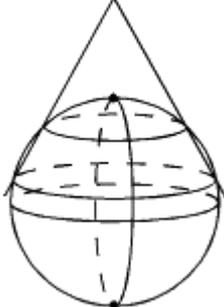
Projection cylindrique : la surface de projection est un cylindre tangent ou sécant au modèle de la Terre.

(Exemple : UTM, Gauss,...)

		
représentation cylindrique directe	représentation cylindrique oblique	représentation cylindrique transverse

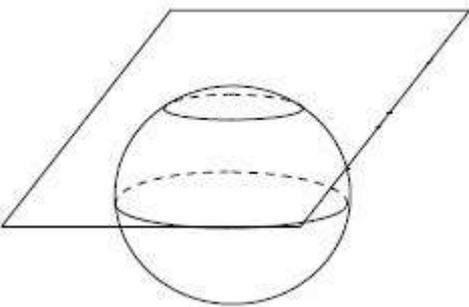
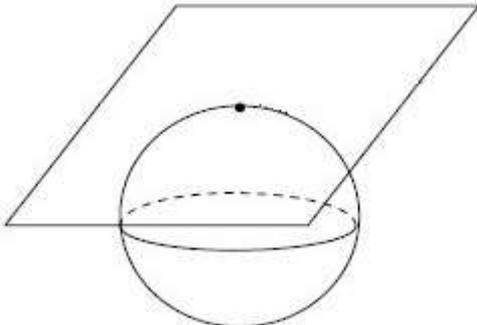
Projection conique : la surface de projection est un cône tangent ou sécant au modèle de la Terre.

(Exemple : Lambert, Lambert-93,...)

	
représentation conique directe tangente	représentation conique directe sécante

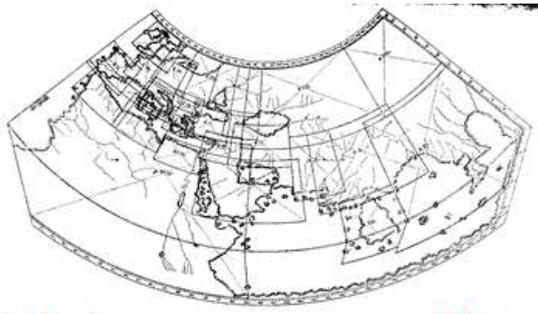
Projection azimutale : le plan lui-même est tangent au modèle de la Terre.

Exemple : Stéréographie polaire (carte du ciel, cartes des régions polaires,...)

	
représentation stéréographique sécante	représentation stéréographique tangente

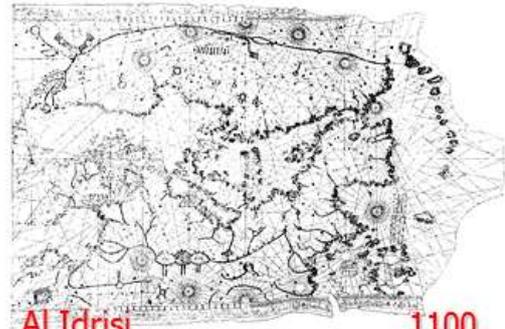
Historique des projections cartographiques

La meilleure représentation de la Terre est le **globe** terrestre, simple réduction de notre planète. Quelle que soit leur étendue, toutes les figures sont parfaitement semblables à leur modèle, abstraction faite du relief, et sont représentées la même échelle. Ces globes, encombrants et d'échelle trop petite, ne sont que peu employés. D'où l'idée de la transposition du volume sur un **plan**, idée vieille de vingt-cinq siècles.



Ptolémée

120



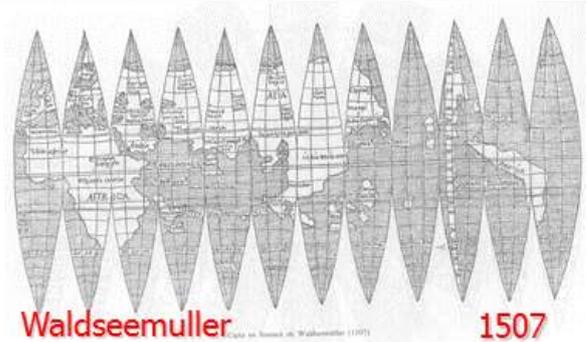
Al Idrisi

1100



Mercator

1595



Waldseemüller

1507

On commença par de véritables projections de la sphère sur un plan ou sur une surface développable, d'après les lois de la perspective. L'idée était aussi de **simplifier les calculs** (cap, distance) : complexes sur le modèle sphérique ou ellipsoïdal de la Terre, ils sont ramenés à des calculs de géométrie plane sur la carte.

Beaucoup plus tard, la connaissance plus précise de la forme de la Terre et le besoin de cartes à grande échelle conduisit à des représentations qui sont des **correspondances mathématiques** entre des points de l'ellipsoïde (définis par longitude λ et latitude φ) et des points d'un plan (définis par x et y , ou E et N dans un système de coordonnées rectangulaires).

À un point M de l'ellipsoïde correspondra un point m (et un seul) du plan, et réciproquement:

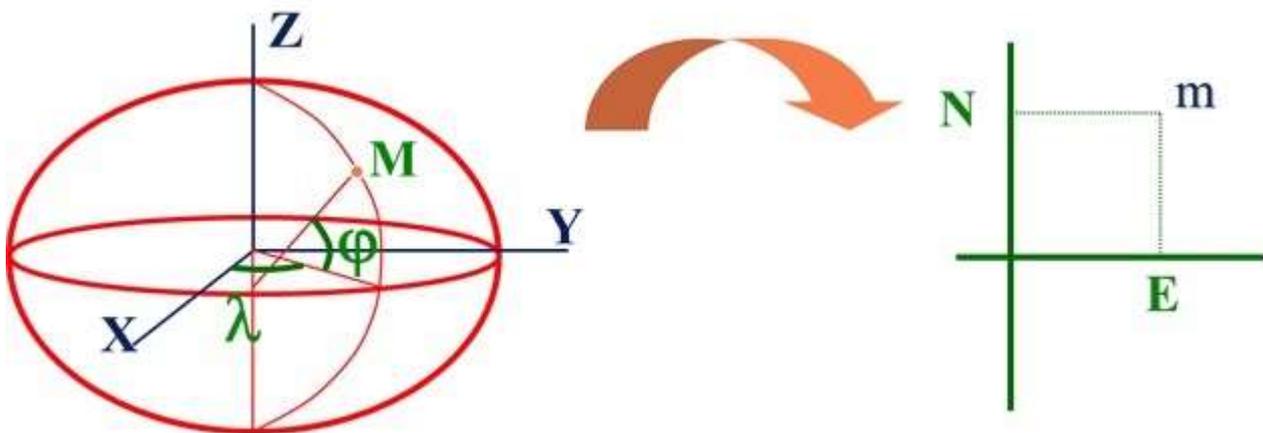
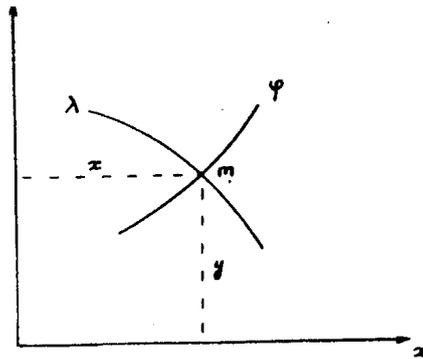
$$M(\lambda, \varphi) \longleftrightarrow m(x, y) \text{ ou } m(E, N)$$

Les formules de correspondance se symbolisent par :

$$x(\lambda, \varphi) \text{ et réciproquement : } \lambda(x, y)$$

$$y(\lambda, \varphi) \text{ et réciproquement : } \varphi(x, y)$$

Le choix des fonctions définit le système de représentation et détermine ses propriétés.



Remarque : les notations E (pour *Easting*) et N (pour *Northing*) sont utilisés pour éviter toute confusion avec les X et Y des coordonnées cartésiennes tridimensionnelles géocentriques.

Pour l'établissement des cartes à **petite échelle**, le modèle terrestre peut être assimilé à une **sphère** : les formules approchées donnent des erreurs inférieures à $1:100^\circ$, qui peuvent être négligeables auprès de certaines déformations introduites par la représentation. Les **formules rigoureuses** traitées dans ce cours, qui comportent des termes supplémentaires fonction de l'excentricité de l'ellipsoïde choisi, ne sont utilisées que pour le calcul des **réalisations géodésiques** et l'établissement des cartes à grande échelle qui en découle.

Déformation des angles

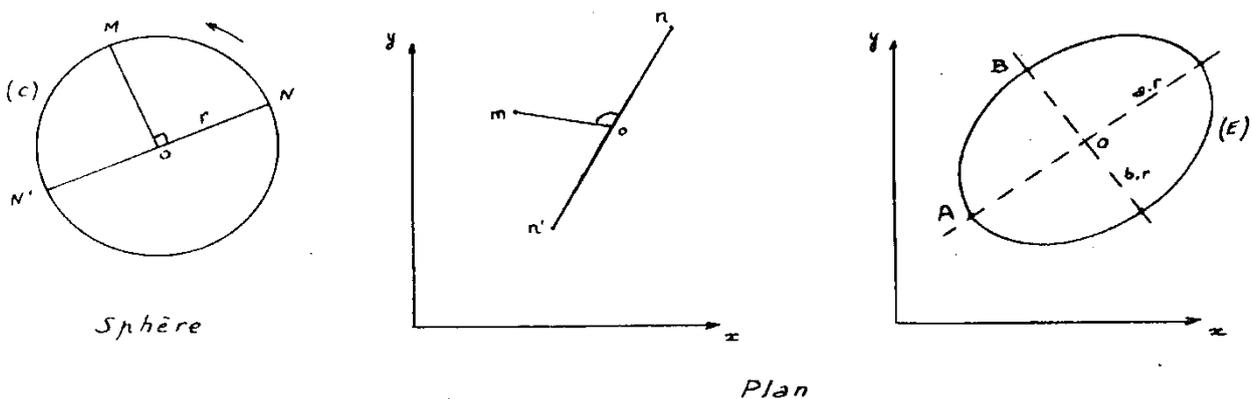
Dans la représentation plane de la sphère terrestre, les angles seront également déformés. Traçons sur la sphère un petit cercle (c) de centre o dont le rayon est égal à l'unité de longueur (voir la figure ci-dessous), et soient M, N et N' trois points de ce cercle tels que :

$$\widehat{M\hat{O}N} = \widehat{M\hat{O}N'} = 90^\circ$$

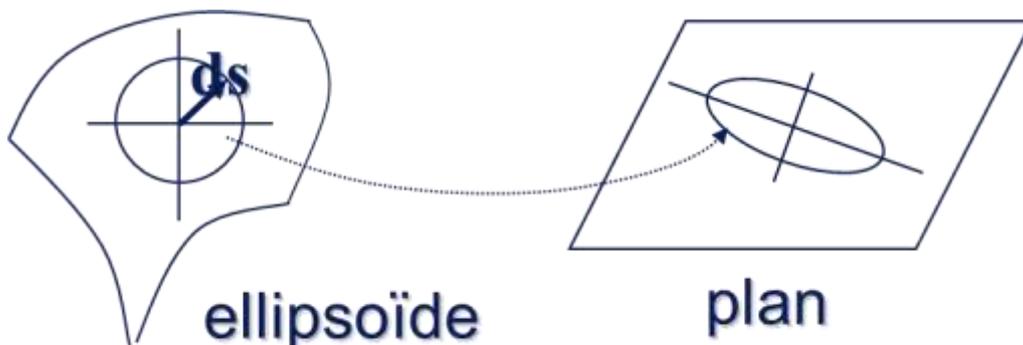
Soient o, m, n et n' les images de ces points dans le plan. En général, la figure sera déformée : nous aurons par exemple $\widehat{m\hat{o}n'} < 90^\circ$ et $\widehat{m\hat{o}n} > 90^\circ$.

Un cercle élémentaire de l'ellipsoïde est transformé en une ellipse (« indicatrice de Tissot »).

On conçoit intuitivement qu'il existe une orientation intermédiaire de cet angle pour laquelle l'image sera un angle droit. Ces deux directions privilégiées, OA et OB du plan (fig.), sont appelées directions principales.



On démontre que le module linéaire prend des valeurs extrêmes sur ces directions : une valeur maximale $a > 1$ sur l'une, une valeur minimale $b < 1$ sur l'autre. **L'image du petit cercle (c) tracé sur le modèle est donc une ellipse (E) de demi-axes ar et br, appelée indicatrice de Tissot : elle est caractérisée par la valeur de ses demi-axes et par l'orientation de ceux-ci. Ces caractéristiques dépendent du système de représentation choisi et de la position du point O à la surface de la sphère.**



Si l'indicatrice de Tissot est un cercle, la projection est dite **conforme** :

- la déformation des distances est indépendante de la direction
- les angles sont conservés (utile pour les triangulations), mais non les distances

Par exemple, le caractère conforme d'une projection impose que l'angle défini par deux lignes géodésiques sur l'ellipsoïde est conservé dans la projection. Les longueurs des lignes géodésiques sont, par contre, altérées.

Si l'indicatrice de Tissot a même aire que le cercle élémentaire, la projection est dite **équivalente** :

- les surfaces sont conservées (utile pour les atlas), mais non les angles
- les déformations des distances dépendent de la direction (azimut)

La plupart des projections d'atlas n'ont ni l'une ni l'autre de ces propriétés et sont définies pour des avantages particuliers de représentation graphique (atlas).

Convergence des méridiens :

Définition : c'est le gisement de l'image du méridien, c'est à dire l'angle (mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre) de l'image du méridien (donc du Nord Géographique) par rapport à l'axe Y de la projection (ou l'angle entre l'axe Y et la direction du Méridien qui est celle du Nord Géographique).

Si la valeur est négative, le Nord géographique est à gauche (à l'Ouest) de l'axe des Y.

Altération des longueurs :

Aucune représentation ne peut conserver toutes les longueurs sur tout le domaine représenté : la sphère (ou l'ellipsoïde) ne pouvant se "mettre à plat" sans déformations, chaque longueur subira une altération qui dépendra de sa position sur la sphère.

On appelle **module linéaire** le rapport de la longueur ab sur le plan à la longueur AB sur l'ellipsoïde :

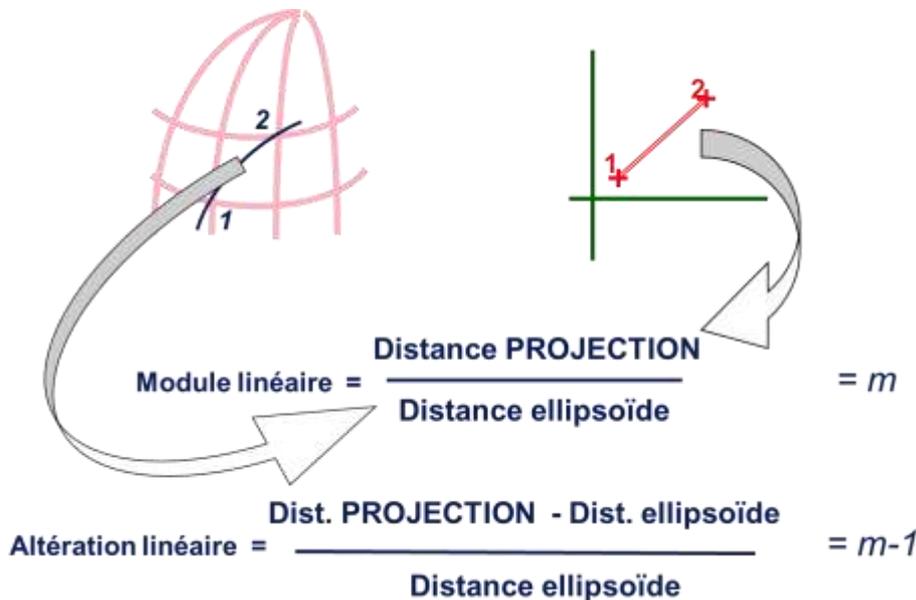
$$\text{module linéaire (sans unités)} = m = ab / AB$$

Il est toujours positif, jamais nul.

N.B. : le module linéaire est noté k dans certaines publications.

On appelle **altération des longueurs** la variation relative des longueurs dans la représentation :

$$\text{altération} = \varepsilon = (ab - AB) / AB = m - 1$$



Remarque : l'altération linéaire peut être calculée avec la formule $(m-1) \cdot 10^5$ (exprimée en cm.km^{-1}), ou bien $(m-1) \cdot 10^6$ (exprimée en mm.km^{-1}).

Exemple: une longueur AB de 1000,00 m mesurée sur l'ellipsoïde est représentée sur le plan par une longueur ab de 999,85 m :

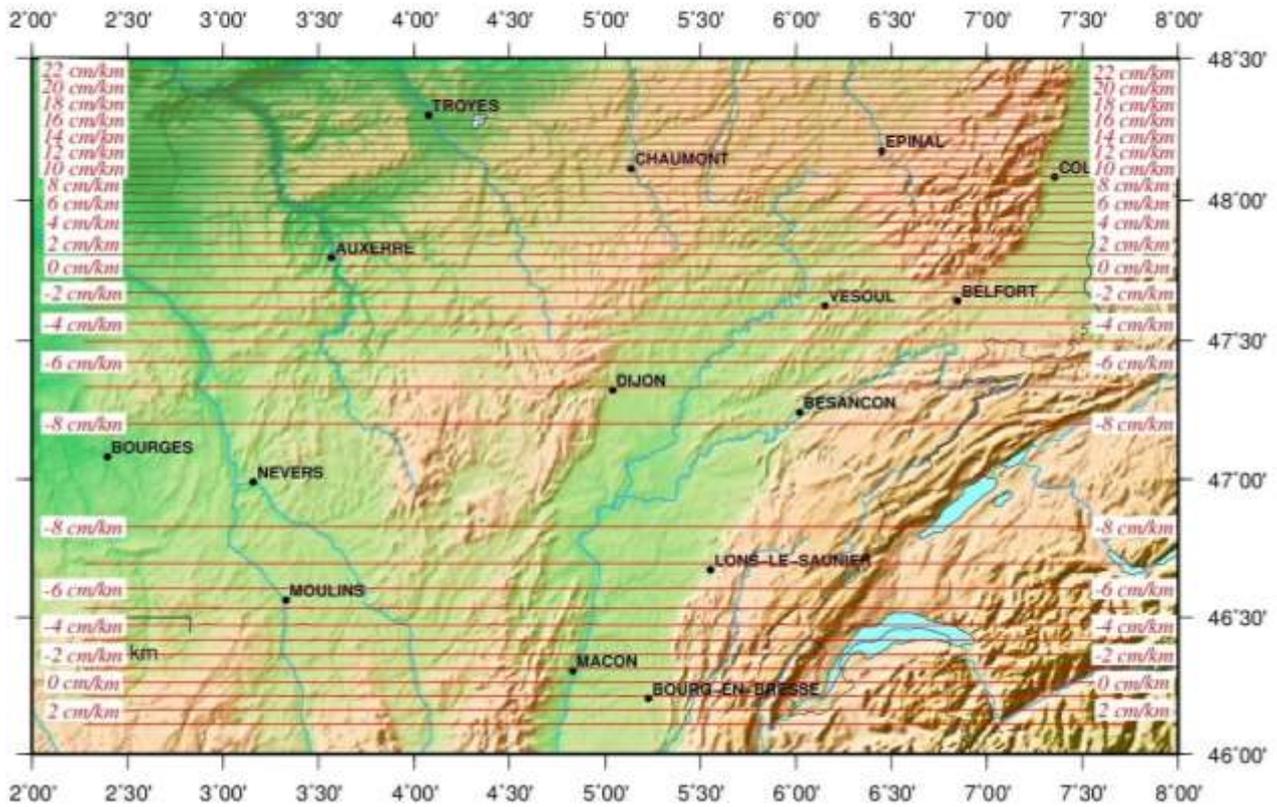
- module linéaire $m = 0,99985$
- altération = $- 0,00015 = - 15 \cdot 10^{-5} \text{ m.m}^{-1}$

En résumé, le module linéaire varie :

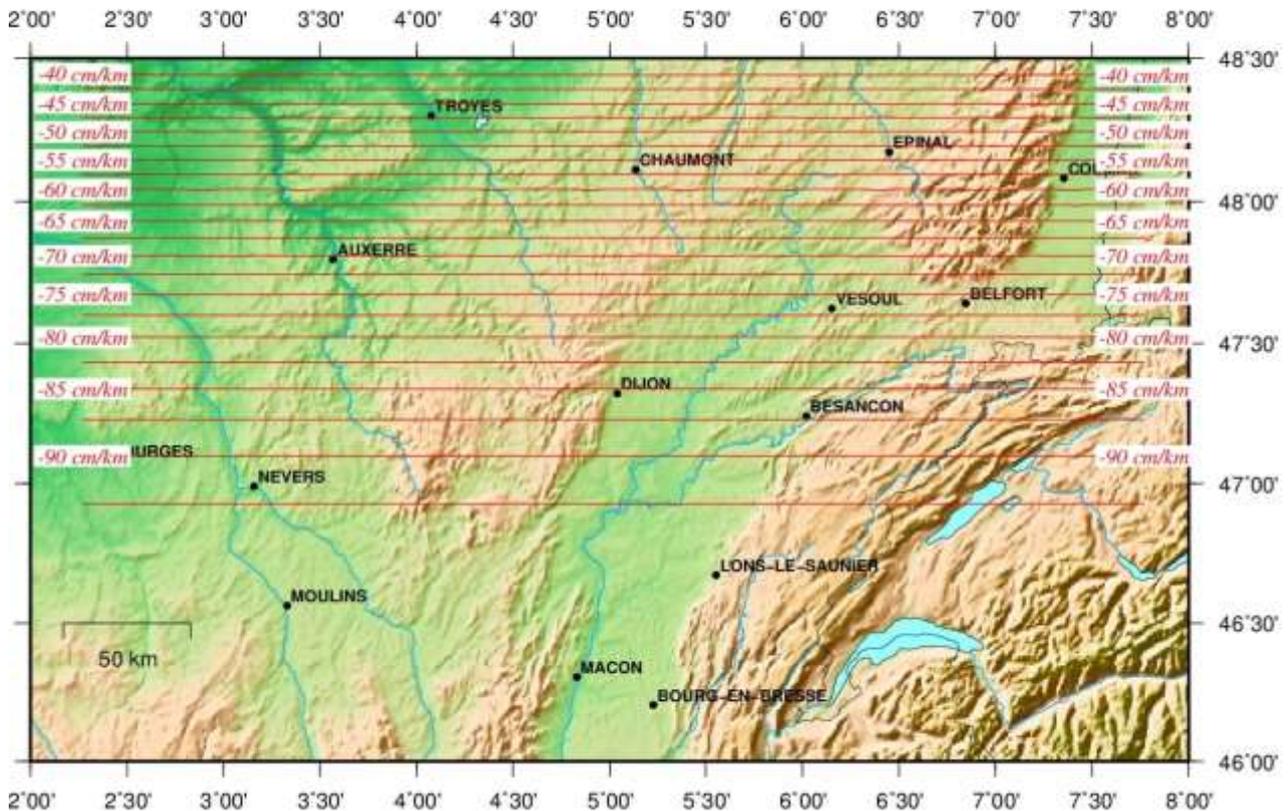
- d'un point à l'autre d'une représentation ;
- autour d'un même point, suivant les directions; ce qui entraîne :
 - l'image d'un petit cercle est une ellipse ;
 - seuls des angles droits particuliers sont conservés ;
 - tous les autres angles sont déformés.

Exemples :

Alteration Lineaire CC47



Alteration Lineaire Lambert-93



Altération des surfaces :

Par définition, le module surfacique $(1+\varepsilon_s)$ est égal au carré du module linéaire
L'altération linéaire ε étant $\ll 1$, on peut écrire

$$1+\varepsilon_s = (1+\varepsilon)^2 \approx 1+2\varepsilon$$

Et par conséquent l'altération surfacique $\varepsilon_s \approx 2\varepsilon$

Types de représentations planes :

Choix d'utilisation:

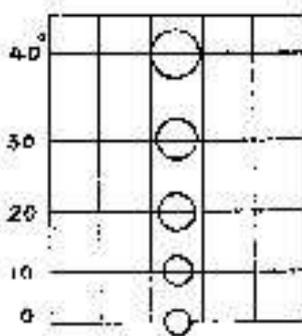
Par un choix particulier des fonctions, on peut obtenir:

- 1) $a = b$: un petit cercle du modèle sera représenté sur le plan par un cercle : le module sera le même dans toutes les directions autour d'un point, **tous les angles seront conservés**. Ces représentations sont appelées **conformes**. **L'altération linéaire est alors indépendante de la direction**.
- 2) $a = 1/b$ soit $ab = 1$: un cercle de rayon unité est représenté par une ellipse de même aire σ ; l'image d' une partie de la Terre, bien que déformée, aura **même surface** que son modèle. Ces représentations sont appelées **équivalentes**.

Remarque : ces deux conditions sont inconciliables, on doit choisir suivant le besoin particulier, la conservation des angles, ou la conservation des surfaces.

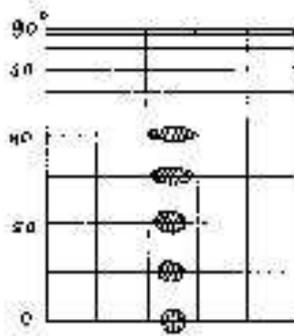
- 3) Si l'on ne fixe aucune de ces deux conditions, on aura des systèmes qui ne conservent ni les angles, ni les surfaces : ce sont les représentations **aphylactiques**.

Exemple : Images planes de petits cercles égaux sur le modèle à différentes latitudes :



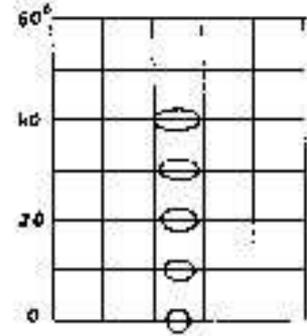
$$a = b$$

Repr. conforme



$$a = 1 : b$$

Repr. équivalente



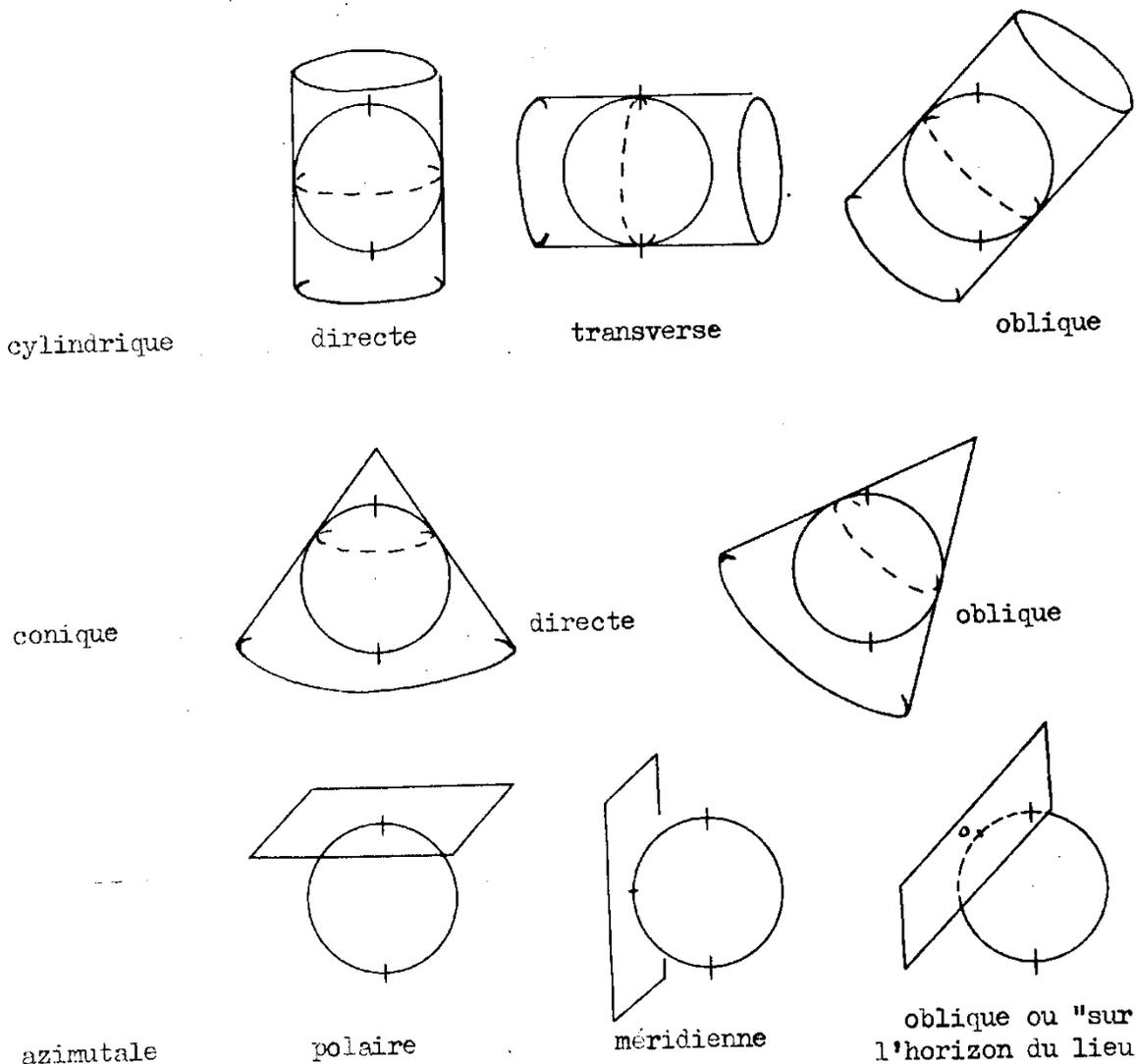
Repr. aphyllactique

- dans la représentation cylindrique conforme (Mercator) l'écartement progressif des parallèles compense la variation du module linéaire suivant ces parallèles, les cercles sont de plus en plus grands mais restent des cercles.
- dans la représentation cylindrique équivalente les parallèles sont de plus en plus serrés, les ellipses ont toutes la même surface.
- dans une représentation cylindrique aphyllactique, les parallèles sont ici équidistants, les cercles ont pour image des ellipses de surface variable.

Classification des projections :

Les différents systèmes peuvent être classés comme la représentation de la Terre sur des surfaces développables (cylindre ou cône) ou sur un plan : d'où leur classification en représentations cylindriques, représentations coniques, représentations azimutales. À ces trois familles se joindront des systèmes divers qui échappent à la classification.

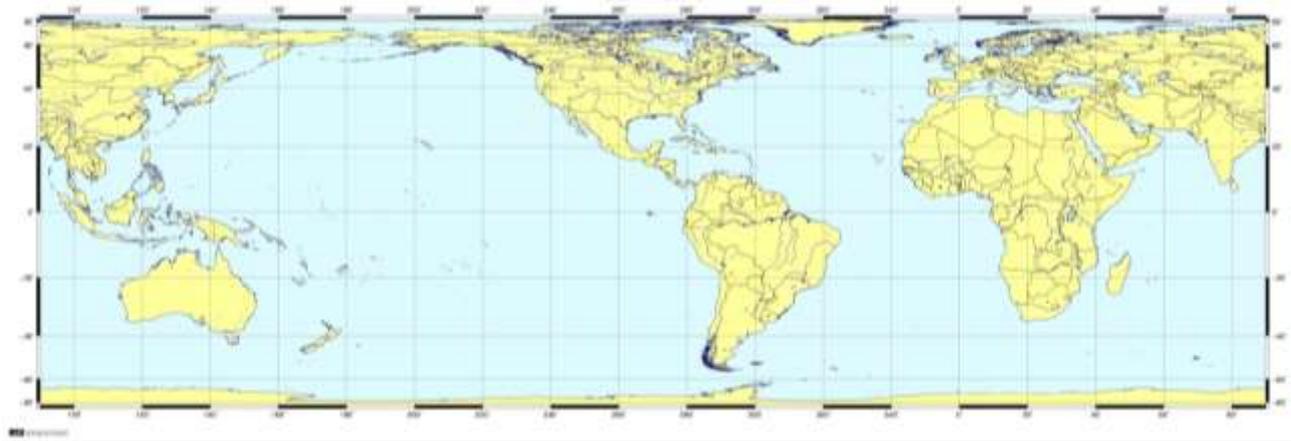
Dans chaque famille, on peut définir à volonté des systèmes qui soient conformes, ou équivalents, ou aphyllactiques et qui, de plus, peuvent présenter des "aspects" différents dont les trois principaux sont symbolisés ci-dessous :



Domaines d'utilisation des représentations

- Les représentations **conformes** sont généralement utilisées pour le calcul des **triangulations** (c'est-à-dire par les géodésiens, géomètres et topographes), pour l'établissement des cartes à grande échelle (de 1:5.000 au 1:50.000) et pour la navigation maritime et aérienne.

- Les représentations **équivalentes** sont généralement utilisées pour les **cartes d'atlas** à petite échelle : les différents pays, bien que déformés, conservent leurs surfaces relatives, ce qui est intéressant pour faire apparaître tout phénomène lié à une répartition en surface (cartographie thématique...)



La Terre vue en projection équivalente de Gall Peters [6]

- Les représentations **aphylactiques** peuvent présenter, malgré l'apparence, de l'intérêt : elles sont parfois employées pour des cartes de navigation, ont été utilisées longtemps par les géodésiens américains pour des cartes des États Unis et sont couramment employées pour des cartes d'atlas.

Isomètre centrale, parallèle automécoïque

La représentation étant conforme, le lieu des points de même module linéaire est appelé isomètre. L'isomètre centrale est le lieu des points où le module linéaire a la valeur minimale. Le lieu des points où le module linéaire est égal à l'unité correspond, pour des représentations sécantes, à deux isomètres particulières appelées automécoïques de la projection.

Propriétés des représentations conformes

Variation des longueurs

Pour l'établissement d'un système de représentation conforme, on pose généralement la condition suivante : sur une ligne particulière ou un point unique, on veut qu'une longueur mesurée sur la terre soit représentée par un segment de même longueur (ce qui impose $m = 1$). Cette ligne sera choisie selon les besoins: équateur, méridien, parallèle, ou toute autre ligne en fonction de la forme du pays à représenter ; elle peut éventuellement se réduire à un point. Dans ces deux cas, la représentation sera qualifiée de **tangente**.

Dans certains systèmes, on peut imposer que les longueurs soient conservées ($m = 1$) suivant deux lignes particulières, généralement parallèles l'une à l'autre et

qualifiées d'automécoïques : la représentation sera, dans ce cas, qualifiée de **sécante**. Entre ces lignes, le module linéaire tendra vers une valeur minimale inférieure à l'unité, qui définira l'isomètre centrale du système. À l'extérieur de ces lignes, le module sera plus grand que 1.

L'avantage de cette approche est que les modèles mathématiques peuvent être caractérisés par une géométrie plane. Ainsi, les calculs de position géodésiques, tels que le problème direct et inverse, peuvent être réalisés en termes de coordonnées planes. L'inconvénient est que les observations (distances, directions, azimuts) doivent être réduites dans le plan de la projection conforme. Ainsi, le caractère conforme d'une projection impose que l'angle défini par deux lignes géodésiques sur l'ellipsoïde est conservé dans la projection. Les longueurs des lignes géodésiques sont, par contre, altérées.

Isomètre centrale

La représentation étant conforme, le module linéaire est le même dans toutes les directions autour d'un point et variera uniquement suivant le point considéré.

Dans le cas d'une représentation tangente, le module linéaire ab/AB vaut 1 au point choisi ou sur la ligne particulière choisie. Lorsque l'on s'éloigne de part et d'autre, le module linéaire deviendra plus grand que l'unité : tous les points situés à une même distance auront le même module et formeront **une ligne appelée isomètre**. La ligne où le module linéaire est minimal et égal à l'unité est appelée isomètre centrale.

Dans le cas d'une représentation **sécante**, le module sera égal à l'unité sur **deux lignes particulières**. Entre ces lignes, il tendra vers une valeur minimale inférieure à l'unité, qui définira l'isomètre centrale du système. À l'extérieur de ces lignes, le module sera plus grand que 1.

Dans tous les cas: l'isomètre centrale est le lieu des points où le module linéaire a la valeur minimale; les isomètres sont des courbes "parallèles" à l'isomètre centrale, lieu des points de même module linéaire.

a) cas des petites échelles :

Sur les cartes générales, d'atlas par exemple, (de $1:10^6$ à $1:20.10^6$) où l'on représente des régions très éloignées de l'isomètre centrale, le module variera de 1 à 6 en limite des planisphères établis en représentation dite "de Mercator". Par exemple, si l'échelle nominale d'un planisphère est de $1:28.10^6$ à l'équateur, l'échelle réelle à la latitude 80° est de $1:5.10^6$ environ.

b) cas des grandes échelles :

Sur les cartes à grande échelle, on veut que l'utilisateur puisse faire des mesures de longueur sur la carte sans se préoccuper de la variation du module : en aucun point de la carte, l'altération linéaire ne doit donc dépasser la valeur $\pm 0,001$ pour que cette variation soit plus faible que l'erreur graphique et que le jeu du papier. Cette condition limite l'utilisation d'un système à une distance de 200 à 300 km de part et d'autre de l'isomètre centrale.

Facteur d'échelle :

Pour respecter cette condition dans le cas d'un système **tangent** on fait parfois subir à la représentation plane **une réduction** : les coordonnées planes x et y de tous les points sont multipliées par un facteur d'homothétie K_0 légèrement plus petit que 1 . En tous points de la carte, le module se réduit dans le même rapport : sur l'isomètre centrale il devient plus petit que 1, et en limite d'utilisation il atteint une valeur moins grande.

Remarque : Cette réduction nous ramène pratiquement à un système sécant, avec deux isomètres de module unité.

Représentations coniques conformes

Représentation conique conforme de la NTF : Lambert Zone

(N.B. : représentation historique : n'est plus légale depuis 2009)

Projection conique conforme conçue par J. H. Lambert en 1772.

Propriétés

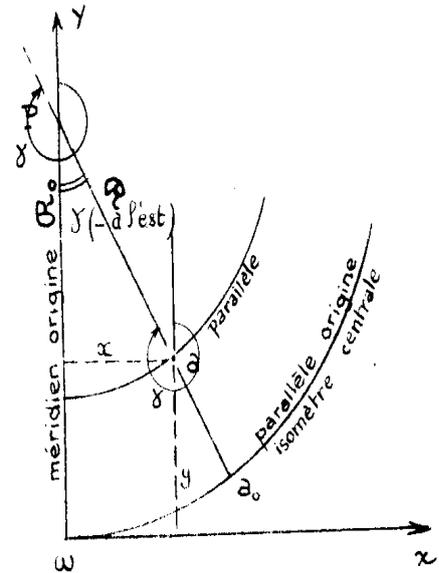
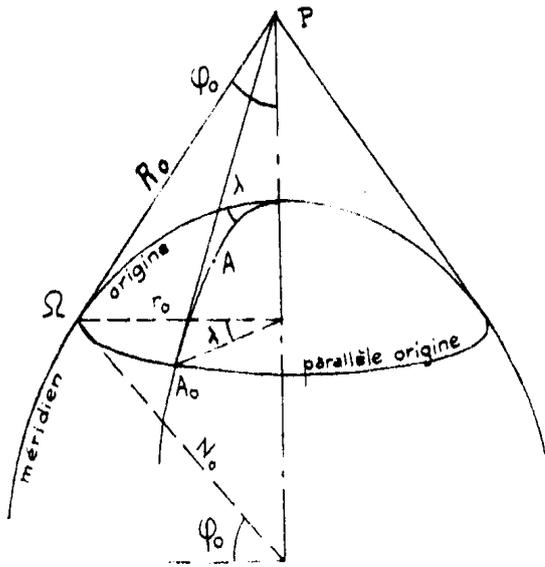
Soit un cône (surface développable) de sommet P tangent à l'ellipsoïde le long d'un parallèle de latitude φ_0 appelé **parallèle origine**. Un méridien est choisi comme méridien origine, le **méridien de Paris** pour les cartes françaises.

Soit $R_0 = \Omega P$ la longueur de la génératrice du cône.

Le cône, surface réglée, peut être développé sur un plan sans déformation:

- les génératrices du cône deviennent des **droites concourantes** en P et sont les images des méridiens de l'ellipsoïde,

- les parallèles sont représentés par des **cercles concentriques** de centre P et de rayon R de longueur telle que la représentation soit conforme,



- le **parallèle origine**, de rayon r_0 , devient un cercle de rayon R_0 dont les arcs sont conservés en vraie grandeur avant homothétie ; c'est donc l'isomètre centrale de la représentation.
- l'axe des y de la représentation est l'image $P\omega$ du méridien origine.
- la droite tangente à la transformée du parallèle origine est l'axe des x

Gisement du méridien

L'angle γ , gisement du méridien, peut être compté à l'intérieur du triangle $Pa_0\omega$ négativement vers l'est et positivement vers l'ouest (par convention) et vaut :

$$\Omega A_0 / R_0 = \lambda r_0 / R_0 = \lambda R_0 \sin \varphi_0 / R_0 = \lambda \sin \varphi_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = -\lambda_{EstParis} \times \sin \varphi_0}$$

Cet angle est appelé **convergence des méridiens**.

En France, pour les projections Lambert Zone, lorsqu'on se trouve à l'Est du Méridien de Paris (méridien central de la projection), la valeur γ est négative et la direction du Nord Géographique se trouve à l'Ouest de l'axe des Y.

Condition de conformité et rayon des parallèles :

La conformité impose que le module linéaire soit le même dans les deux directions méridiens et parallèles d'un point a image de A sur l'ellipsoïde.

Soient aa' et aa'' des éléments infinitésimaux images de AA' et AA'' respectivement sur le méridien et le parallèle du point A.

$$\Rightarrow \frac{aa'}{AA'} = \frac{aa''}{AA''} \Rightarrow \frac{-d\mathcal{R}}{\rho d\varphi} = \frac{\mathcal{R}d\gamma}{rd\lambda} = \frac{\mathcal{R} \sin \varphi_0}{N \cos \varphi}$$

Le rapport $\frac{d\gamma}{d\lambda}$ vaut $\sin(\varphi_0)$ et est appelé n , exposant de la projection.

d'où
$$\frac{d\mathcal{R}}{\mathcal{R}} = -\sin \varphi_0 \times \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi} \Rightarrow \ln \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0} = -\sin \varphi_0 \int_0^\varphi \frac{\rho d\varphi}{N \cos \varphi}$$

La valeur de l'intégrale est la **latitude isométrique**, notée L ou \mathcal{L} d'où

$$\ln \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{R}_0} = -\sin \varphi_0 (L - L_0) \Rightarrow \boxed{\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \times e^{-\sin \varphi_0 (L - L_0)}}$$

Coordonnées Rectangulaires.

Afin d'éviter les coordonnées négatives, on ajoute des constantes: $x = 600\,000$ m et $y = 200\,000$ m pour les représentations Lambert zone I à III utilisées en France.

$$x = -\mathcal{R} \sin \gamma + 600000m$$

$$y = \mathfrak{R}_0 - \mathfrak{R} \cos \gamma + 200000m$$

Module linéaire.

Pour réduire l'altération des longueurs on fait subir à la représentation plane une homothétie de facteur $\mu_0 < 1$ qui, agissant sur les coordonnées planes, réduit le rayon de l'isomètre centrale. Une seule représentation Lambert couvrant la France entière présenterait une altération linéaire maximale = +3 m/km, altération qui, même après réduction par une homothétie appropriée, reste forte.

N_0 et ρ_0 étant les rayons de courbure principaux correspondant à l'isomètre centrale, on démontre que, sur une distance de plusieurs centaines de kilomètres à partir de l'isomètre centrale, la formule suivante convient pour calculer la valeur du module linéaire en un point.

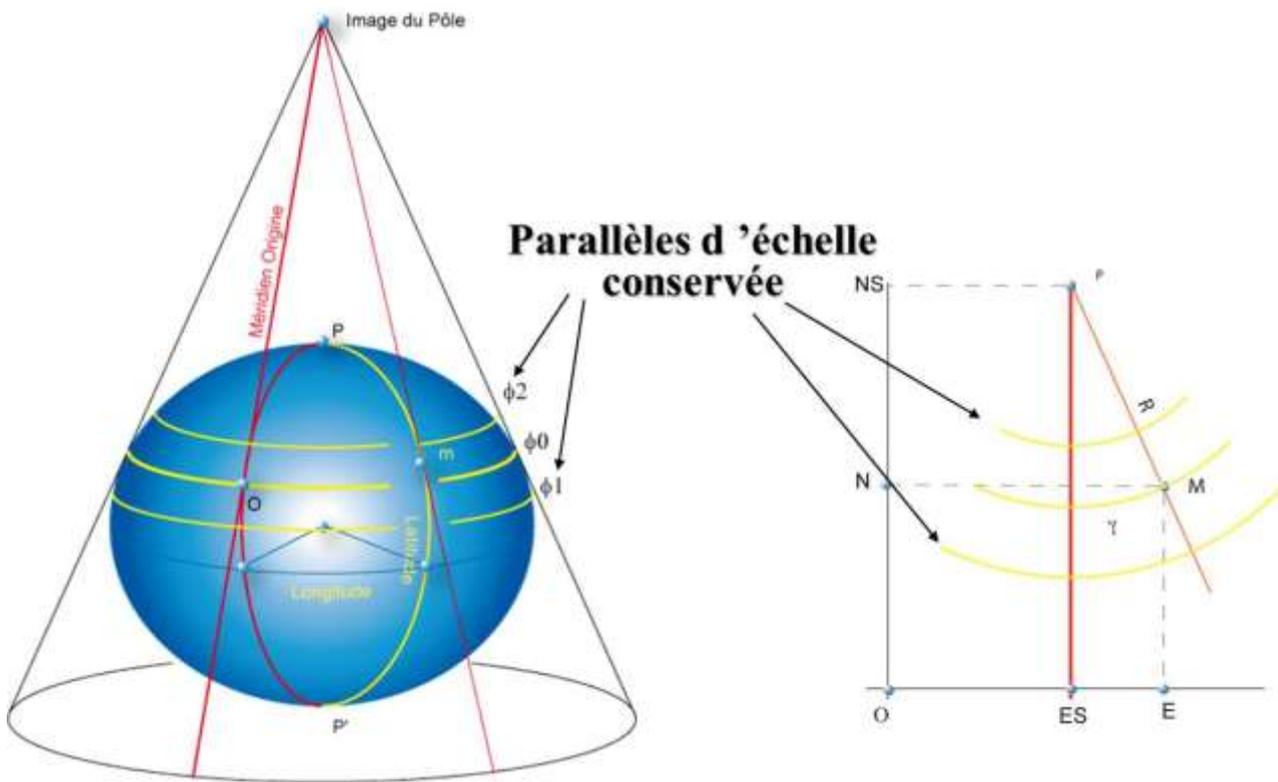
$$\mu \cong \mu_0 \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin \varphi_0} \times \left(\frac{\mathfrak{R}_0 - \mathfrak{R}}{\rho_0} \right)^2 \right)$$

μ_0 étant le module linéaire sur l'isomètre centrale

L'altération linéaire qui en découle peut être approximée par :

$$\varepsilon = \frac{Y_0^2}{2N_0\rho_0} \approx \frac{Y_0^2}{2R^2}$$

Cas d'une projection sécante.



Projection adoptées en France métropolitaine

Quatre zones ont été choisies pour représenter la France à grande échelle :

Lambert I (zone nord)	isomètre centrale: parallèle 55 gr	$\mu_0 = 0,999877341$
Lambert II (zone centrale)	isomètre centrale: parallèle 52 gr	$\mu_0 = 0,999877420$
Lambert III (zone sud)	isomètre centrale: parallèle 49 gr	$\mu_0 = 0,999877499$
Lambert IV (Corse)	isomètre centrale: parallèle 46,85 g	$\mu_0 = 0,999944710$

Les zones I, II et III s'étendent jusqu'à 150 km de l'isomètre centrale, sauf le nord de la zone I et le sud de la zone III (200 km pour cette dernière).

Représentations coniques conformes du RGF93 : Lambert 93

L'Institut National de l'Information Géographique et Forestière a mis en place, sur recommandation du CNIG, un nouveau système géodésique, sous-ensemble du système européen EUREF, sous la dénomination de RGF93. L'expression des coordonnées dans ce système est tridimensionnelle sous forme de longitudes, latitudes et hauteurs ellipsoïdales. Les besoins de l'information géographique dans son exploitation actuelle requièrent l'utilisation de coordonnées planes issues d'une

projection cartographique unique (LAMBERT-93) et aussi d'une famille de projections d'altération faible (Coniques Conformes 9 zones).

Critères de choix du Lambert-93

Les critères de choix de cette projection sont les suivants :

- unicité

- le traditionnel découpage en zones d'applications est à proscrire

- facilité d'utilisation

- les altérations angulaires et linéaires doivent être minimisées
- les processus de calcul doivent être d'exploitation simple et compatibles avec les logiciels existants
- il ne doit pas y avoir de confusion avec des coordonnées existantes

- facilité de mise en œuvre

- cette projection doit permettre d'utiliser les documents cartographiques existants avec le minimum de difficultés

6-7-2 Caractéristiques du Lambert-93

Le territoire couvert est d'environ 1100 km x 1100 km (quadrilatère limité à l'Ouest par la Bretagne, à l'Est et au Sud par la Corse et au Nord par le Pas-de-Calais). Une représentation plane conforme, quelle qu'elle soit, élimine les altérations angulaires et entraîne sur cette surface des altérations linéaires dont l'amplitude est de 4 m/km (de 0 à +4 m/km ou de -1 à +3 m/km etc.). Le choix d'une représentation *conique conforme* apparaît comme une solution satisfaisante eu égard aux critères

précédemment cités. La sélection des caractéristiques et paramètres a été effectuée afin d'y répondre au mieux.

* **Ellipsoïde** : **GRS80**. C'est sur cet ellipsoïde que sont exprimées les coordonnées géographiques (longitude, latitude et hauteur) du système RGF93.

* **Projection "sécante"**: la projection conique conforme peut être définie de deux manières: soit tangente avec facteur d'échelle, soit sécante avec deux parallèles d'échelle conservée. Les deux types de définition sont rigoureusement équivalents, mais l'usage récent (logiciels SIG, traitements GPS...) privilégie le deuxième.

* **Parallèles standards** (: d'échelle conservée ou *automécoïques*)

Le choix des parallèles 44° et 49° permet de minimiser en valeur absolue l'altération linéaire (de -1m/km à +2 et marginalement +3 m/km ; voir les figures présentées dans les pages suivantes).

* **Origine / coordonnées de l'origine**

Le point central, proche du barycentre du territoire, est de coordonnées géographiques rondes (longitude 3° E, latitude 46° 30' N).

Les constantes de la projection définissant les coordonnées de ce point ont été choisies de manière qu'aucune confusion ne puisse être relevée avec les coordonnées actuellement encore en usage (Lambert [NTF] I, II, III, IV, II étendu, UTM [E50 ou WGS84] f30, f31, f32).

Avec $E_0 = 700\ 000$ m, $N_0 = 6\ 600\ 000$ m, tout point du territoire aura des coordonnées planes E, N telles que :

$$100000 < E < 1200000$$

$$6000000 < N < 7100000$$

LAMBERT-93

- *Ellipsoïde : GRS 80* - *1/2 grand axe: $a = 6\,378\,137\text{ m}$*
- *aplatissement $f = 1 / 298.257222101$*

- *Projection conique conforme sécante:*

- *parallèles d'échelle conservée (parallèles "standards"):*

$$\varphi_1 = 44^\circ \text{ N}$$

$$\varphi_2 = 49^\circ \text{ N}$$

- *origine :*

- *méridien central : $\lambda_0 = 3^\circ \text{ E Greenwich}$*

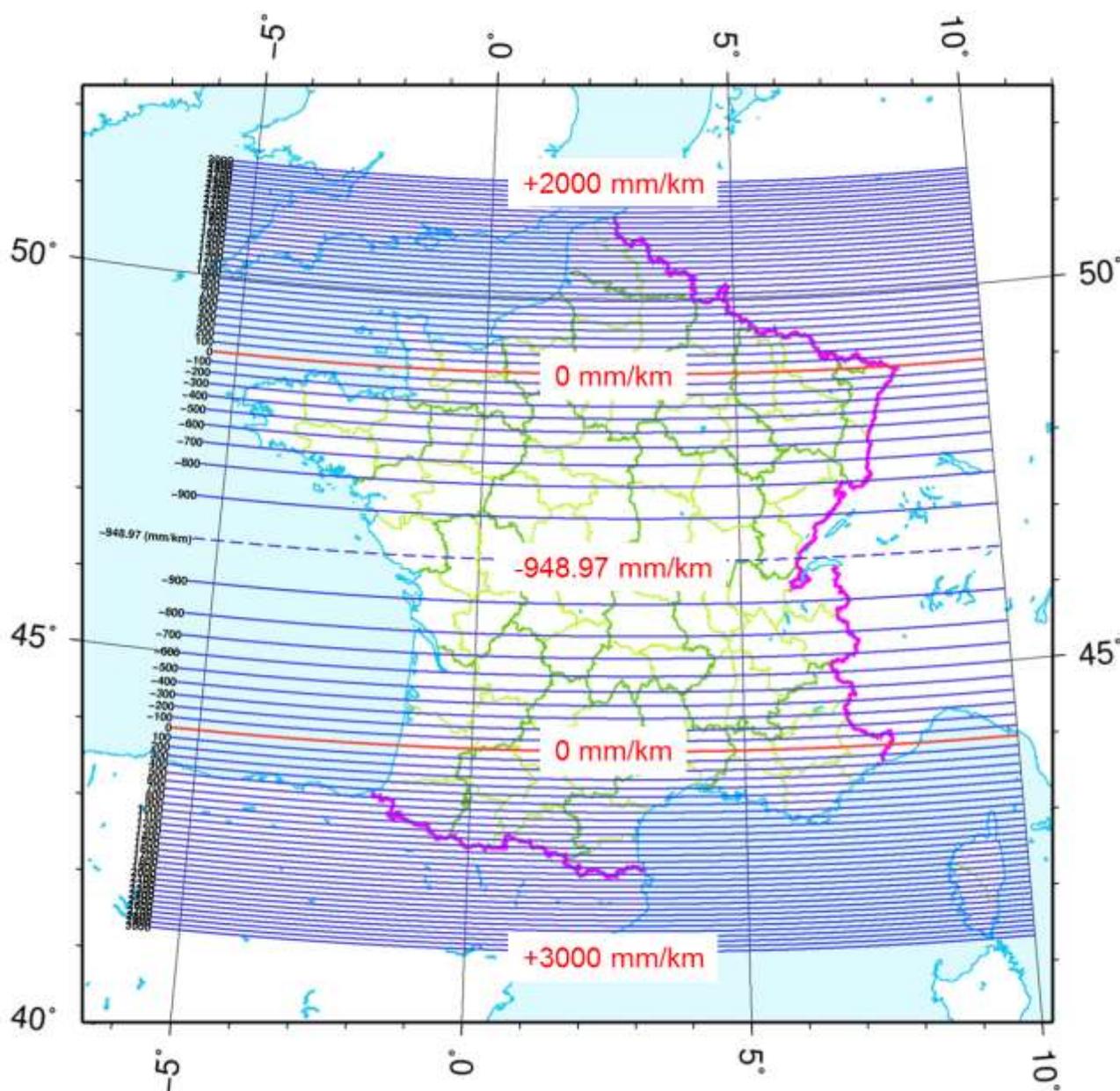
- *latitude origine : $\varphi_0 = 46^\circ 30' \text{ N}$*

- *coordonnées de l'origine:*

$$E_0 = 700\,000\text{ m}$$

$$N_0 = 6\,600\,000\text{ m}$$

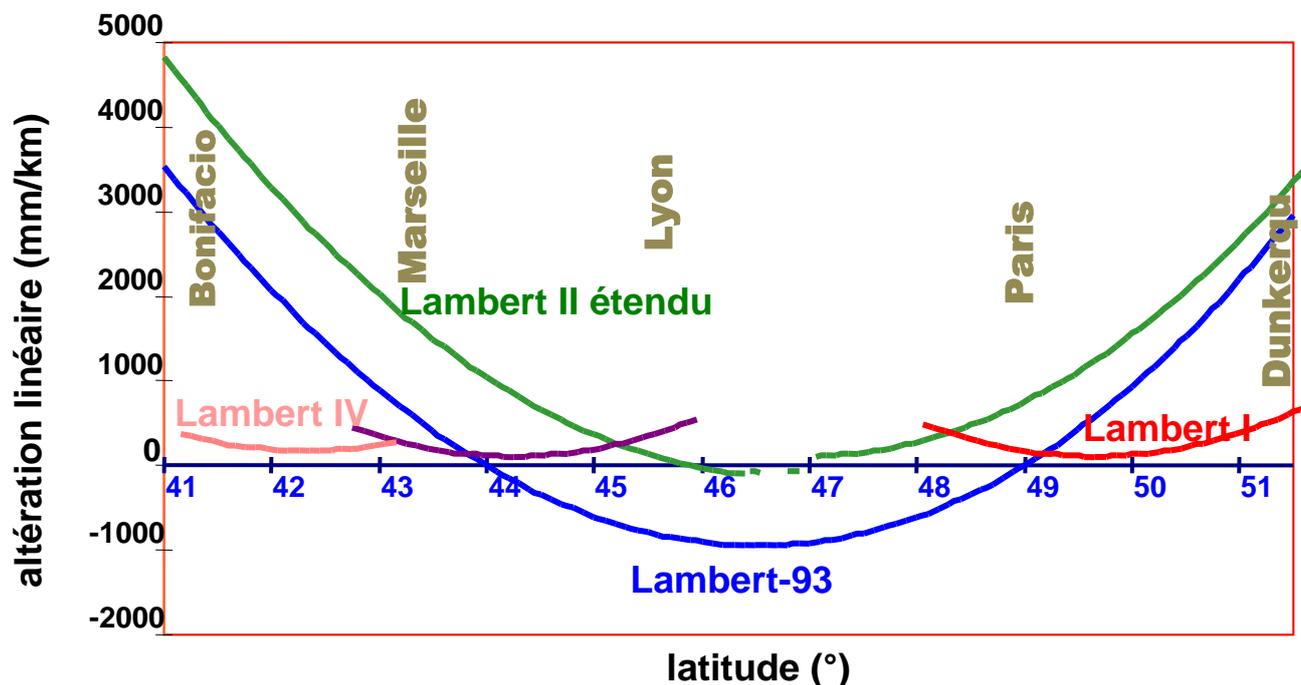
- Altérations linéaires



Variant de -1 m/km à +3 m/km, la déformation des longueurs peut être importante et rendre malaisées certaines applications topographiques. C'est en particulier la variation locale de l'altération qui peut mettre en cause la validité des procédures classiques de calcul de réduction de distances ou de visées azimutales. Des algorithmes spécifiques sont donc à définir : la quasi-linéarité de la variation de l'altération en fonction de la latitude autorise des méthodes simples d'intégration.

La figure suivante permet de comparer les altérations linéaires des projections associées à la NTF et du Lambert 93

Lambert-93 (44° - 49°)



Représentations coniques conformes du RGF93 : CC 9 Zones

Critères de choix de la Conique Conforme 9 zones

Cette projection a été développée sur une recommandation du Groupe "Obligation de Rattachement" de la Commission des Référentiels du C.N.I.G, afin de proposer une solution alternative au RGF93, permettant de réduire significativement l'altération linéaire.

Le décret n° 2006-272 du 3 mars 2006 modifiant le décret no 2000-1276 du 26 décembre 2000 portant application de l'article 89 de la loi no 95-115 du 4 février 1995 modifiée d'orientation pour l'aménagement et le développement du territoire relatif aux conditions d'exécution et de publication des levés de plans entrepris par les services publics prévoit la possibilité de les réaliser dans une des projections Coniques Conformes neuf zones sur la France Métropolitaine.

Ces projections n'ont d'intérêt que pour des travaux sur des cartes et plans papiers à l'exclusion des applications numériques. Les projections neuf zones ont été introduites pour réduire fortement l'altération linéaire, leur emploi suppose donc que

l'on fasse des mesures dont on espère une grande précision sur un plan papier. Elle ne se justifie notamment ni pour les plans dont la précision est inférieure à l'altération linéaire, ni pour les levés numériques pour lesquels l'altération linéaire peut être entièrement corrigée de manière simple.

L'attention des utilisateurs est attirée sur le fait que, en introduisant des discontinuités aux frontières de zones, l'utilisation des projections neuf zones complique les applications numériques et peut générer des surcoûts importants par rapport à une solution utilisant le Lambert 93, en particulier si l'application utilise des données en mode image. Par conséquent, l'IGN en déconseille l'usage pour toutes les applications faisant appel à des données numériques. Pour ses produits, l'IGN a choisi la seule projection nationale, le Lambert- 93.

Caractéristiques de la 'Conique Conforme 9 zones'

Les neuf zones se répartissent du Sud au Nord. Chaque zone est centrée sur un parallèle de latitude ronde, allant du 42° au 50° degré de latitude nord, avec une emprise de 1 degré de latitude de part et d'autre de ce parallèle. La nomenclature usuelle est la suivante :

1ère zone : CC42

2ème zone : CC43

3ème zone : CC44

4ème zone : CC45

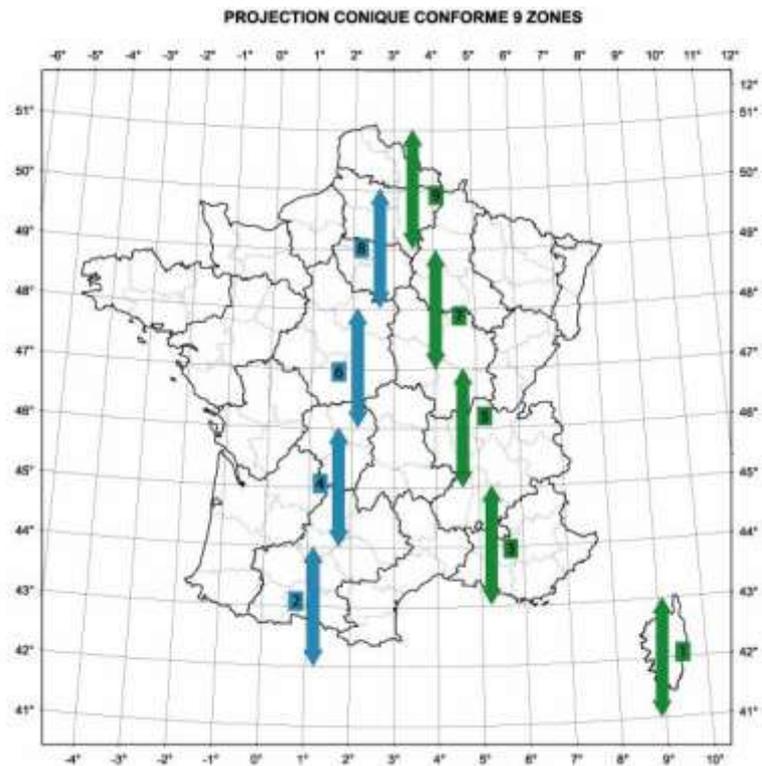
5ème zone : CC46

6ème zone : CC47

7ème zone : CC48

8ème zone : CC49

9ème zone : CC50



Toutes les zones sont utiles de manière à assurer un plein recouvrement. Le recouvrement entre deux zones consécutives est ainsi de 50%. À chacune de ces 9 zones est associée une projection conique conforme portant la dénomination 'CCxx' où xx correspond à la latitude du parallèle origine soit : CC42 (zone 1), CC43 (zone 2), CC44 (zone 3), CC45 (zone 4), CC46 (zone 5), CC47 (zone 6), CC48 (zone 7), CC49 (zone 8) et CC50 (zone 9).

L'altération linéaire est comprise entre les valeurs suivantes

$$-9 \text{ cm/km} < \varepsilon < +7 \text{ cm/km}$$

C'est une projection sécante.

Constantes de la représentation

Dans le tableau suivant, NZ est le numéro de la zone (de 1 à 9).

	CC France zone NZ
Latitude origine : φ_0	$(41 + NZ)^\circ$
Zone d'application	Lat. origine +/- 111 km
φ_1	$\varphi_0 - 0.75^\circ$
φ_2	$\varphi_0 + 0.75^\circ$
Longitude origine ou méridien central de la projection	3° Est Greenwich
E_0	1 700 000 m
N_0	$(NZ * 1\,000\,000) + 200\,000$ m

Exemple : projection conique conforme CC47

Latitude origine = 47°

Numéro de zone $NZ = 6$

Longitude origine = 3.00000000°

Premier parallèle standard = 46.25000000°

Deuxième parallèle standard = 47.75000000°

Constante $E_0 = 1\,700\,000$ m

Constante $N_0 = 6\,200\,000$ m

FORMULES

Nous sommes, pour la projection Lambert-93 comme pour les projections Coniques Conformes 9 zones, dans le cas de figure « sécant » (deux parallèles auto-mécoïques). Le cône « traverse » l'ellipsoïde.

Ce cas peut se ramener au cas « tangent » avec facteur d'échelle.

L'IGN publie tous les algorithmes relatifs à la projection conique conforme de Lambert sur son site Internet :

http://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/algorithmes/notice/NTG_71.pdf

Formulaire

Constantes des projections Lambert France (NTF)

	Lambert I	Lambert II	Lambert II étendu	Lambert III	Lambert IV	Lambert 93
n	0,7604059656	0,7289686274	0,7289686274	0,6959127966	0,6712679322	0,7256077650
C (m)	11603796,98	11745793,39	11745793,39	11947992,52	12136281,99	11754255,426
X _S (m)	600000,000	600000,000	600000,000	600000,000	234,358	700000,000
Y _S (m)	5657616,674	6199695,768	8199695,768	6791905,085	7239161,542	12655612,050

$\lambda_0 = 0$ grades Paris (soit 2° 20' 14,025" E Greenwich)

$e = 0,08248325676$

Lambert zone ► Lambert zone

Attention : cet algorithme ne peut pas être utilisé avec le Lambert 93

... en entrée

... en sortie

n, C, X_S, Y_S : constantes de la projection (avec indices I et F pour « initial » et « final »)	X_F, Y_F : coordonnées Lambert finales
X_I, Y_I : coordonnées Lambert initiales	
$\gamma_F = \frac{n_F}{n_I} \arctan \frac{X_{SI} - X_I}{Y_I - Y_{SI}}$	$\xi = \frac{1}{n_I} \ln \frac{C_I}{\sqrt{(X_I - X_{SI})^2 + (Y_I - Y_{SI})^2}}$
$R_F = C_F \exp(-n_F \xi)$	
$X_F = X_{SF} + R_F \sin \gamma_F$	$Y_F = Y_{SF} - R_F \cos \gamma_F$

Application numérique : Lambert I ► Lambert 2 étendu	
$X_I = 750000,00 \text{ m}$	$X_{II\text{étendu}} = 750283,12 \text{ m}$
$Y_I = 300000,00 \text{ m}$	$Y_{II\text{étendu}} = 2600360,77 \text{ m}$

Lambert ► coordonnées géographiques	
... en entrée	... en sortie
n, C, X_S, Y_S : constantes de la projection	λ, φ : longitude, latitude
λ_0 : longitude du méridien central	
e : excentricité de l'ellipsoïde	
X, Y : coordonnées Lambert	
$ R = \sqrt{(X - X_S)^2 + (Y - Y_S)^2}$	
$\gamma = \arctan \frac{X - X_S}{Y_S - Y}$	$\lambda = \lambda_0 + \frac{\gamma}{n}$
$\xi = -\frac{1}{n} \ln \left \frac{R}{C} \right $	$\varphi = \xi^{-1}(\xi, e)$
NB : $\xi^{-1}(\xi, e)$ représente la latitude isométrique inverse, obtenue à l'aide de l'algorithme <i>latitude à partir de la latitude isométrique</i> .	

Application numérique : Lambert I ► Coordonnées NTF	
$X = 1\,029\,705,083 \text{ m}$	$\lambda \text{ (rad)} = 0,145512099 \text{ E}$
$Y = 272\,723,849 \text{ m}$	$\varphi \text{ (rad)} = 0,872664626 \text{ N}$

Coordonnées géographiques ► Lambert	
... en entrée	... en sortie
n, C, X_S, Y_S : constantes de la projection	X, Y : coordonnées Lambert
λ_0 : longitude du méridien central	

e : excentricité de l'ellipsoïde

λ, φ : longitude, latitude

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \quad R = C \exp(-n \xi)$$

$$\gamma = n (\lambda - \lambda_0)$$

$$X = X_S + R \sin \gamma$$

$$Y = Y_S - R \cos \gamma$$

Application numérique : Coordonnées NTF ► Lambert 2

$\lambda = 0,4721669$ gr E Paris

X = 632 542,058 m

$\varphi = 51,8072313$ gr N

Y = 180 804,145 m

Latitude à partir de la latitude isométrique

... en entrée

... en sortie

ξ : latitude isométrique

φ : latitude

e : excentricité de l'ellipsoïde

$$\varphi_0 = 2 \arctan \left(\exp(\xi) \right) - \frac{\pi}{2}$$

φ est obtenu par itérations successives

$$\varphi_i = 2 \arctan \left(\left(\frac{1 + e \sin \varphi_{i-1}}{1 - e \sin \varphi_{i-1}} \right)^{(e/2)} \exp(\xi) \right) - \frac{\pi}{2}$$

Application numérique

$\xi = 1,005 526 536 48$

φ (rad) = 0,872 664 626 00

e = 0,081 991 889 98

Paramètres des projections coniques conformes de Lambert			
	Lambert I	Lambert II	Lambert III
Zone d'application (latitude)	de 57,0 gr à 53,5 gr	de 53,5 gr à 50,5 gr	de 50,5 gr à 47,0 gr
Latitude origine	55 gr (49°30')	52 gr (46°48')	49 gr (44°06')
Longitude origine ²	0 gr Paris	0 gr Paris	0 gr Paris
Parallèles automécoïques	48°35'54,682" 50°23'45,282"	45°53'56,108" 47°41'45,652"	43°11'57,449" 44°59'45,938"
E ₀	600 000 m	600 000 m	600 000 m
N ₀	200 000 m	200 000 m	200 000 m
Facteur d'échelle	0,999 877 34	0,999 877 42	0,999 877 50
	Lambert IV	Lambert II étendu	Lambert 93
Zone d'application (latitude)	de 47,8 gr à 45,9 gr	de 57,0 gr à 45,9 gr	de 41° à 51°
Latitude origine	46,85 gr (42°09'54")	52 gr (46°48')	46°30'
Longitude origine	0 gr Paris	0 gr Paris	3° 00' est Greenwich
Parallèles automécoïques	41°33'37,396" 42°46'03,588"	45°53'56,108" 47°41'45,652"	44° 49°
E ₀	234,358 m	600 000 m	700 000 m
N ₀	185 861,369 m	2 200 000 m	6 600 000 m
Facteur d'échelle	0,999 944 71	0,999 877 42	0,999 051 03

	Lambert I, II, III, IV, II étendu	Lambert 93
Référentiel géodésique	NTF	RGF93
Ellipsoïde	Clarke 1880 IGN	IAG GRS 80
Demi grand axe (a)	6 378 249,2 m	6 378 137,00 m
Aplatissement (f)	1 / 293,466 021	1/298,257 222 101
Première excentricité (e)	0,082 483 256 76	0,081 819 191 12

Paramètres des projections Coniques Conformes 9 Zones (CC 9 Zones)	
Latitude origine ³ : φ_0	41+NZ°
Zone d'application	φ_0 +/- 111 km
Parallèle automécoïque φ_1	$\varphi_0 - 0.75^\circ$
Parallèle automécoïque φ_2	$\varphi_0 + 0.75^\circ$
Longitude origine ou méridien central de la projection : λ_0	3 ° Est Greenwich

² 0 grade Paris = 2° 20' 14,025" Est Greenwich

³ NZ : numéro de la zone (de 1 à 9)

E_0

1 700 000 m

 N_0

(*) (NZ * 1 000 000) +200 000 m

Coordonnées géographiques RGF93 vers CC 9 Zones

... en entrée

... en sortie

 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, E_0, N_0$: paramètres de la projection

X, Y : coordonnées CC 9 Zones

 λ_0 : longitude du méridien central

a : demi grand axe de l'ellipsoïde

e : excentricité de l'ellipsoïde

 λ, φ : longitude, latitude RGF93

$$L(\varphi, e) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}$$

$$n = \frac{\ln \left(\frac{\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_2}} \cdot \cos(\varphi_2)}{\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}} \cdot \cos(\varphi_1)} \right)}{L(\varphi_1, e) - L(\varphi_2, e)}$$

$$X_S = E_0$$

$$C = \frac{\frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_1}} \cdot \cos(\varphi_1)}{n} \cdot \exp(n \cdot L(\varphi_1, e))$$

$$Y_S = N_0 + c \cdot \exp(-n \cdot L(\varphi_0, e))$$

$$R = C \exp(-n L_{\varphi, e})$$

$$\gamma = n (\lambda - \lambda_0)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_S + R \sin \gamma$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_S - R \cos \gamma$$

CC 9 Zones vers coordonnées géographiques RGF93

... en entrée

... en sortie

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, E_0, N_0$: paramètres de la projection

λ, φ : longitude, latitude RGF93

λ_0 : longitude du méridien central

e : excentricité de l'ellipsoïde

X, Y : coordonnées CC 9 Zones

$$n = \frac{\ln \left(\frac{\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_2}} \cdot \cos(\varphi_2)}{\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_1}} \cdot \cos(\varphi_1)} \right)}{L(\varphi_1, e) - L(\varphi_2, e)}$$

$$X_s = X_0$$

$$|R| = \sqrt{(X - X_s)^2 + (Y - Y_s)^2}$$

$$\xi = -\frac{1}{n} \ln \left| \frac{R}{C} \right|$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\gamma}{n}$$

$$C = \frac{\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_1}} \cdot \cos(\varphi_1)}{n} \cdot \exp(n \cdot L(\varphi_1, e))$$

$$Y_s = Y_0 + c \cdot \exp(-n \cdot L(\varphi_0, e))$$

$$\gamma = \arctan \frac{X - X_s}{Y_s - Y}$$

$$\varphi = \xi^{-1}(\xi, e)$$

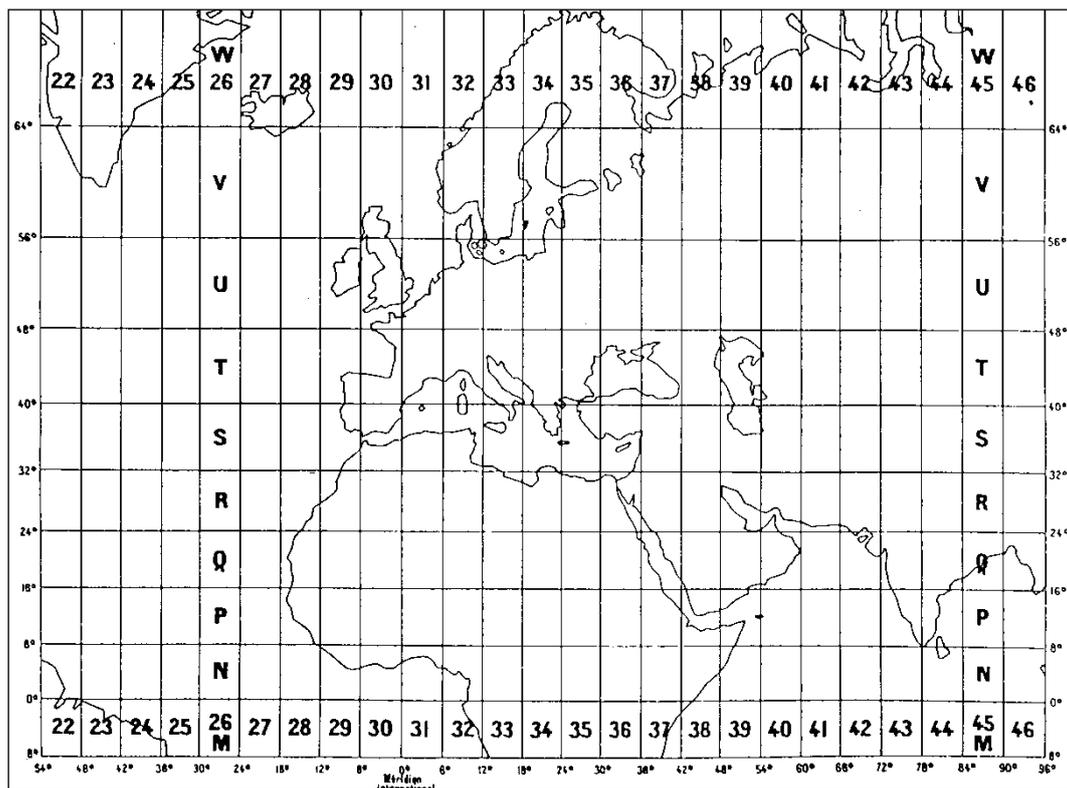
NB : $\xi^{-1}(\xi, e)$ représente la latitude isométrique inverse, obtenue à l'aide de l'algorithme *latitude à partir de la latitude isométrique*.

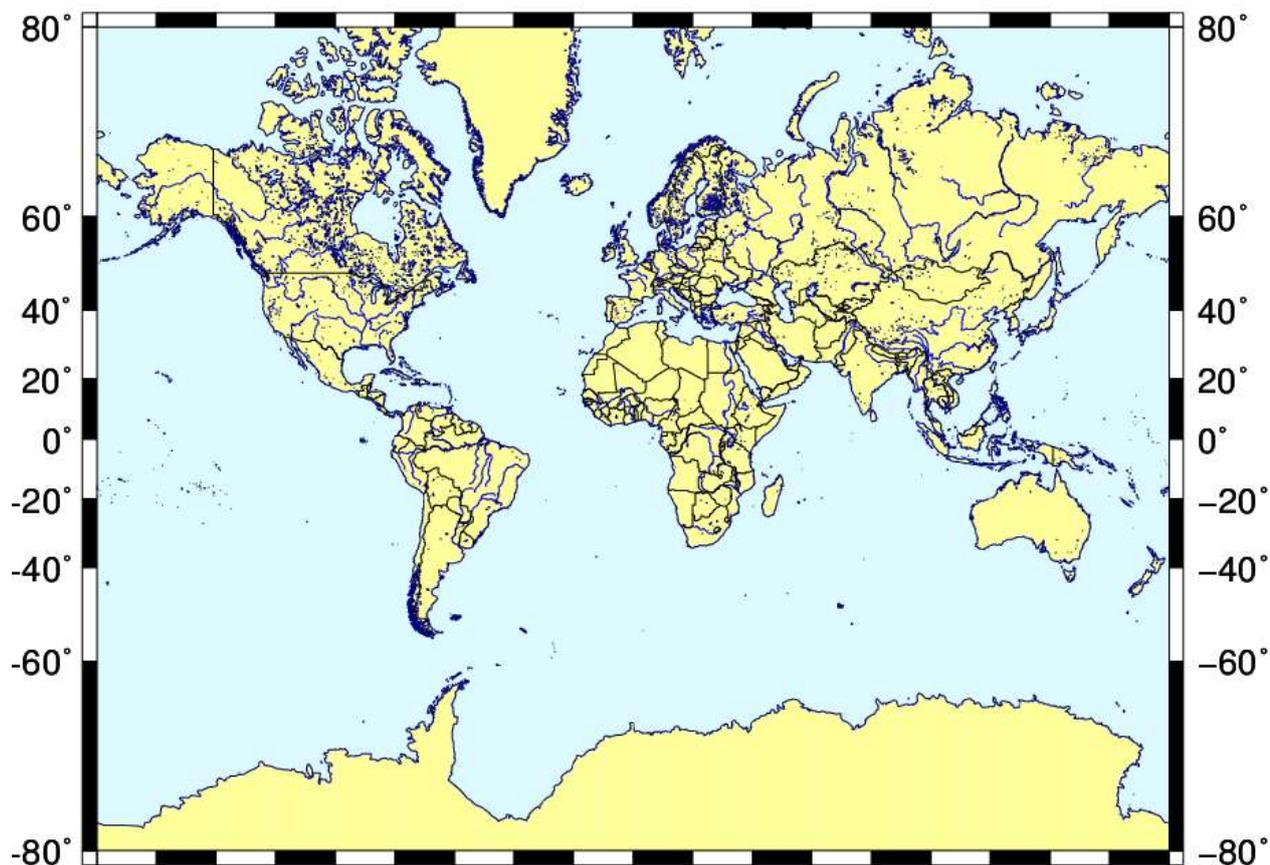
REPRÉSENTATIONS CYLINDRIQUES

Propriétés (cas des représentations tangentes)

Représentations cylindriques directes:

- le module linéaire égal à l'**unité** suivant l'équateur, représenté par une **droite**
- les **méridiens** régulièrement espacés en longitude, sont représentés par des **droites** parallèles et équidistantes, perpendiculaires à l'équateur (la convergence des méridiens est partout égale à 0).
- les **parallèles** sont représentés par des **droites** parallèles entre elles et parallèles à l'équateur, leur espacement variant suivant les conditions que l'on impose.





La Terre vue en projection de Mercator directe [6]

Quelles que soient les conditions, le module linéaire le long des parallèles sera toujours

$$m = \frac{1}{\cos \varphi}$$

En effet, un arc de parallèle de longueur $r.\lambda = (R.\cos\varphi)\lambda$ est représenté sur la carte comme un arc d'équateur de longueur $R.\lambda$.

Remarquons que la valeur est infinie aux pôles, qui est donc représenté par une droite comme les parallèles.

Les loxodromiques (lignes à cap constant) sont des lignes droites.

Représentations cylindriques transverses ou obliques

Elles ont les mêmes caractéristiques que précédemment, mais le module est l'unité suivant, soit un méridien dans l'aspect transverse, soit un grand cercle quelconque dans l'aspect oblique. On parlera dans ce cas de :

- "**pseudo-méridiens**" : grands cercles de la sphère orthogonaux à la ligne suivant laquelle le module linéaire est l'unité.
- "**pseudo-parallèles**" : petits cercles de la sphère, lieu des points à égale distance de cette ligne.

La représentation Universal Transverse Mercator (UTM) :

Elle est basée sur une projection (conforme) transverse de Mercator.

- Inventée par Johann Heinrich Lambert en 1772
- Dérivation analytique par Carl Friedrich Gauss dans les années 1820
- Complétée par L. Kruger en 1912 (formules)

Elle fut conçue par l'armée américaine dans les années 1940.

Utilisation en France : les outre-mer.

N.B. : historiquement, l'UTM a également été associé à l'ED50 sur le territoire métropolitain).

Définitions:

C'est une représentation plane cylindrique conforme transverse de l'ellipsoïde

équateur \Rightarrow axe Ox

méridien central $\lambda_0 \Rightarrow$ axe Oy

module linéaire :

sur le méridien central : k_0 (aussi noté μ_0) = **0,9996**

constante ajoutée à x : **500000 m**

constante ajoutée à y :

10000000 m (hémisphère sud uniquement).

La Terre est divisée en **60 fuseaux** de **6°** d'amplitude, numérotés de 1 à 60 dans le sens direct.

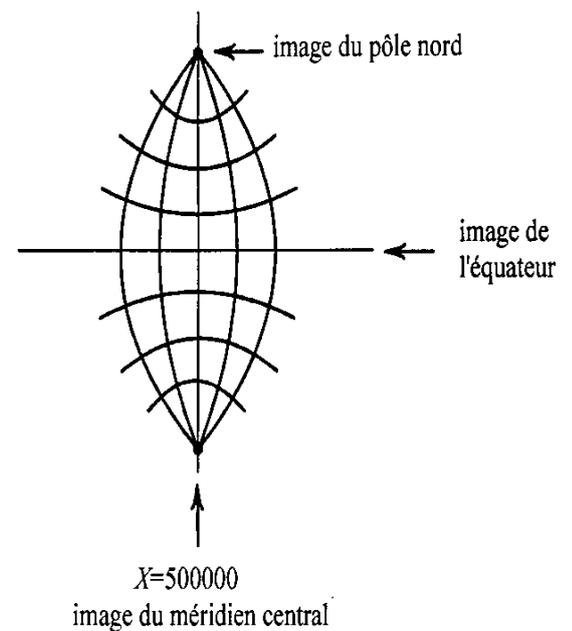
La longitude du méridien central du fuseau f est

$$\lambda_{0,n} = 6^\circ * f - 183^\circ$$

Inversement, pour un point donné à la longitude λ (en degrés), on a

$$f = \text{Ent} \left(\frac{\lambda + 180}{6} \right) + 1$$

Le méridien de Greenwich est la frontière entre les fuseaux 30 et 31.



Propriétés :

- à latitude constante, le module linéaire de la projection augmente lorsqu'on s'éloigne du méridien central, atteint 1, puis devient supérieur à 1 ;
- le long d'un méridien, le module linéaire diminue quand la latitude croît ;
- UTM conserve les angles, mais déforme les distances et les surfaces.

Exemple : les pays intersectés par le fuseau UTM 31 Nord →

Formulaires :

Développement de l'arc de méridien.

On présente le calcul de l'abscisse curviligne sur l'arc de méridien pour une latitude φ sur un ellipsoïde donné, de demi-grand axe unitaire.

- paramètres en entrée :

φ (latitude)

e (première excentricité de l'ellipsoïde)

C (tableau de 5 coefficients pour arc de méridien)

- paramètre en sortie : β (arc de méridien sur un ellipsoïde de demi-grand axe a)

L'expression du rayon de courbure méridien en fonction de la latitude est :

$$\rho = d\beta/d\varphi = a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2}$$

qui permet le calcul de la valeur d'une portion élémentaire d'arc d'ellipse méridienne. L'intégration de l'expression donne par conséquent la valeur d'un arc d'ellipse :

$$\beta = a(1 - e^2) \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}$$



On peut alors calculer cette intégrale à l'aide de méthode numériques itératives ou à l'intégration terme à terme de développements limités, par exemple :

$$\beta = a(b_0\varphi + \sum_{i=1}^4 b_i \sin 2i\varphi)$$

avec :

$$b_0 = 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} - \frac{175e^8}{16384}$$

$$b_1 = -\frac{3e^2}{8} - \frac{3e^4}{32} - \frac{45e^6}{1024} - \frac{105e^8}{4096}$$

$$b_2 = \frac{15e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} + \frac{525e^8}{16384}$$

$$b_3 = -\frac{35e^6}{3072} - \frac{175e^8}{12288}$$

$$b_4 = -\frac{315e^8}{131072}$$

Attention : l'utilisation de développements limités impose de rester à l'intérieur du fuseau de 6° de large. D'autres algorithmes sont utilisables sur des zones plus larges en latitude sans perte de précision.

Transformation de coordonnées : $\lambda, \varphi \Rightarrow E, N$ (formulaire IGN)

Transformation de coordonnées géographiques en coordonnées dans le système de projection Mercator Transverse :

Paramètres en entrée :

λ_c : longitude origine par rapport au méridien origine = λ_o

φ_o : latitude origine

n : rayon de la sphère intermédiaire = $k_o \cdot a$

$X_s = X_o$

$Y_s = Y_o - n \cdot \beta^*(\varphi_o, e)$

e : première excentricité de l'ellipsoïde

λ : longitude

φ : latitude, comprise entre -80° et +80°

Paramètres en sortie :

E, N : coordonnées en projection Transverse Mercator.

- calcul des coefficients :

$$\begin{aligned}
Q_{[1]} &= 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 \\
Q_{[2]} &= \frac{1}{8}e^2 - \frac{1}{96}e^4 - \frac{9}{1024}e^6 - \frac{901}{184320}e^8 \\
Q_{[3]} &= \frac{13}{768}e^4 + \frac{17}{5120}e^6 - \frac{311}{737280}e^8 \\
Q_{[4]} &= \frac{61}{15360}e^6 + \frac{899}{430080}e^8 \\
Q_{[5]} &= \frac{49561}{41287680}e^8
\end{aligned}$$

- calcul de la latitude isométrique, notée \mathcal{L}

$$\mathcal{L} = Ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{e}{2} Ln\left(\frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi}\right)$$

- calcul de la pseudo longitude sur la sphère intermédiaire

$$\Phi = \arcsin \frac{\sin(\lambda - \lambda_c)}{ch(\mathcal{L})}$$

- calcul de la latitude croissante \mathcal{L}_s (sur la sphère)

$$\mathcal{L}_s = Ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

On remarque que $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}(\varphi, 0)$

- calcul de la pseudo latitude sur la sphère intermédiaire

$$\Lambda = \arctan \frac{sh(\mathcal{L})}{\cos(\lambda - \lambda_c)}$$

- expression par nombre complexe

$z = \Lambda + i L s$ variable complexe sur l'ellipsoïde avec $i^2 = -1$

$$Z = n \cdot C_1 \cdot z + n \cdot \sum_{k=1}^4 C_{k+1} \cdot \sin(2 \cdot k \cdot z)$$

- expression des coordonnées planes :

$$E = \text{Im}(Z) + Xs$$

$$N = \text{Re}(Z) + Ys$$

Transformation de coordonnées : $\lambda, \varphi \Rightarrow X, Y$ (formulaire simplifié)

Avertissement : ce formulaire est moins rigoureux géodésiquement parlant lorsqu'on sort des limites du fuseau (écart < 1 cm dans le fuseau, mais atteignant 10 cm lorsqu'on déborde d'un demi-fuseau)

Le formulaire de passage de (λ, φ) à (X, Y) est le suivant:

- $n^{(1)} = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi}$
- $\Lambda = n^{(1)} (\lambda - \lambda_0)$
- $V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi}$
- $X = X_c + \frac{k_0 a \sqrt{1 + e'^2}}{2V^2} \ln \frac{n^{(1)} + V \cos \varphi \sin \Lambda}{n^{(1)} - V \cos \varphi \sin \Lambda}$
- $Y = Y_c + k_0 \beta(\varphi) + \frac{k_0 a \sqrt{1 + e'^2}}{V^2} \left(\arctan \frac{\tan \varphi}{V \cos \Lambda} - \arctan \frac{\tan \varphi}{V} \right)$

e' désigne la seconde excentricité de l'ellipsoïde.

β désigne la longueur de l'arc de méridien entre l'équateur et la latitude φ . Une formule approchée permettant de calculer β au millimètre près est :

$$\beta = a(b_0 \varphi + b_1 \sin 2\varphi + b_2 \sin 4\varphi + b_3 \sin 6\varphi + b_4 \sin 8\varphi)$$

$$\text{avec } b_0 = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8$$

$$b_1 = -\frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{32}e^4 - \frac{45}{1024}e^6 - \frac{105}{4096}e^8$$

$$b_2 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{45}{1024}e^6 + \frac{525}{16384}e^8$$

$$b_3 = -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{175}{12288}e^8$$

$$b_4 = \frac{315}{131072}e^8$$

Transformation de coordonnées : X,Y \Rightarrow λ,φ

Transformation de coordonnées dans le système de projection Mercator transverse en coordonnées géographiques

Paramètres en entrée :

λ_c : longitude origine par rapport au méridien origine = λ_o

n : rayon de la sphère intermédiaire = $ko.a$

$X_s = X_o$

$Y_s = Y_o - n.\beta^*(\varphi_o, e)$

e : première excentricité de l'ellipsoïde.

X, Y : coordonnées en projection Transverse Mercator

Paramètres en sortie

λ : longitude.

φ : latitude.

Calcul des coefficients :

$$\begin{aligned}
Q_{1]} &= 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 \\
Q_{2]} &= \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{48}e^4 + \frac{7}{2048}e^6 + \frac{1}{61440}e^8 \\
Q_{3]} &= \frac{1}{768}e^4 + \frac{3}{1280}e^6 + \frac{559}{368640}e^8 \\
Q_{4]} &= \frac{17}{30720}e^6 + \frac{283}{430080}e^8 \\
Q_{5]} &= \frac{4397}{41287680}e^8
\end{aligned}$$

$$Z = \frac{Y - Y_s}{n \cdot C_1} + i \cdot \left(\frac{X - X_s}{n \cdot C_1} \right) \quad \text{avec } i^2 = -1$$

$$z = z' - \sum_{k=1}^4 C_{k+1} \cdot \sin(2 \cdot k \cdot z')$$

Ces expressions mathématiques révèlent qu'elles ont été obtenues à partir d'expansions en séries. Par conséquent, leur exactitude est limitée par les erreurs de troncature. Les formules données ici permettent de conserver une excellente exactitude à l'intérieur du fuseau nominal de 6° d'emprise en longitude.

$$\mathcal{L} = \text{Re}(z)$$

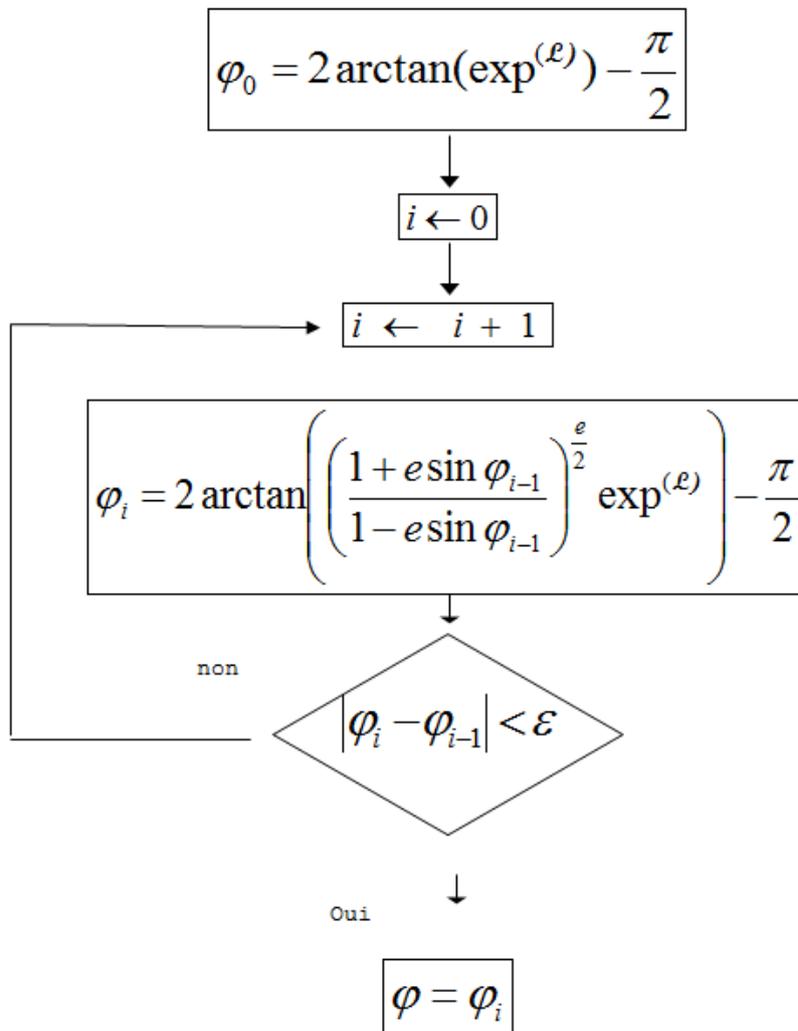
$$\mathcal{L}_s = \text{Im}(z)$$

Longitude : $\lambda = \lambda_c + \arctan(\text{sh } \mathcal{L}_s / \cos \mathcal{L})$

$\Phi = \arcsin(\sin \mathcal{L} / \text{ch } \mathcal{L}_s)$

avec $\mathcal{L}_s = \mathcal{L}(\Phi, 0)$

Latitude : $\varphi = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}, e)$ (avec la formule itérative ci-dessous)



Autre formulaire de passage simplifié :

Avertissement : ce formulaire est moins rigoureux géodésiquement parlant lorsqu'on sort des limites du fuseau (écart < 1 cm dans le fuseau, mais atteignant 10 cm lorsqu'on déborde d'un demi-fuseau)

Pour passer de (X,Y) à (λ,φ) , on utilise le formulaire ci-dessous:

- $$\varphi_0 = \frac{Y - Y_C}{k_0 a}$$
- $$n^{(1)} = \sqrt{1 + e'^2 \cos^4 \varphi_0}$$
- $$V = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi_0}$$
- $$\xi = \frac{(X - X_C)V^2}{k_0 a \sqrt{1 + e'^2}}$$
- $$\eta = \left[Y - Y_C - k_0 \beta(\varphi_0) \right] \frac{V^2}{k_0 a \sqrt{1 + e'^2}} + \arctan \frac{\tan \varphi_0}{V}$$
- $$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{n^{(1)}} \arctan \frac{\tan \left[2 \arctan(\exp \xi) - \frac{\pi}{2} \right]}{\cos \eta}$$
- $$\Lambda = n^{(1)} \sin(\lambda - \lambda_0)$$
- $$\Phi = \arctan(\cos \Lambda \tan \eta)$$
- $$\mathbf{L}_E(\varphi) = \frac{1}{n^{(1)}} \left(\mathbf{L}_S(\Phi) - \mathbf{L}_S \left(\arctan \frac{\tan \varphi_0}{V} \right) \right) + \mathbf{L}_E(\varphi_0)$$

$\mathbf{L}_E(\varphi)$ représente la latitude isométrique sur l'ellipsoïde.

Latitude : $\varphi = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}, e)$ (avec la formule itérative ci-dessus)

Facteur d'échelle k

Formule générale pour la Mercator Transverse

$$k \approx 1 + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2} \cos^2(\varphi)(1 + \varepsilon^2) + \frac{(\lambda - \lambda_0)^4}{24} \cos^4(\varphi)(5 - 4 \cdot \tan^2(\varphi))$$

$$\text{avec } \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2(\varphi)$$

Formule pour l'UTM

$$k \approx 0.9996 \left(1 + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2}{2} \cos^2(\varphi)(1 + \varepsilon^2) + \frac{(\lambda - \lambda_0)^4}{24} \cos^4(\varphi)(5 - 4 \cdot \tan^2(\varphi)) \right)$$

Formule exacte à $2 \cdot 10^{-8}$ près jusqu'à 3° de longitude de part et d'autre du méridien central.

Rappel : l'altération linéaire correspondante peut être calculée avec la formule $(m-1) \cdot 10^5$ (exprimée en cm.km^{-1}), ou bien $(m-1) \cdot 10^6$ (exprimée en mm.km^{-1}).

Remarquons que le facteur d'échelle augmente essentiellement avec la différence de longitude par rapport au méridien central.

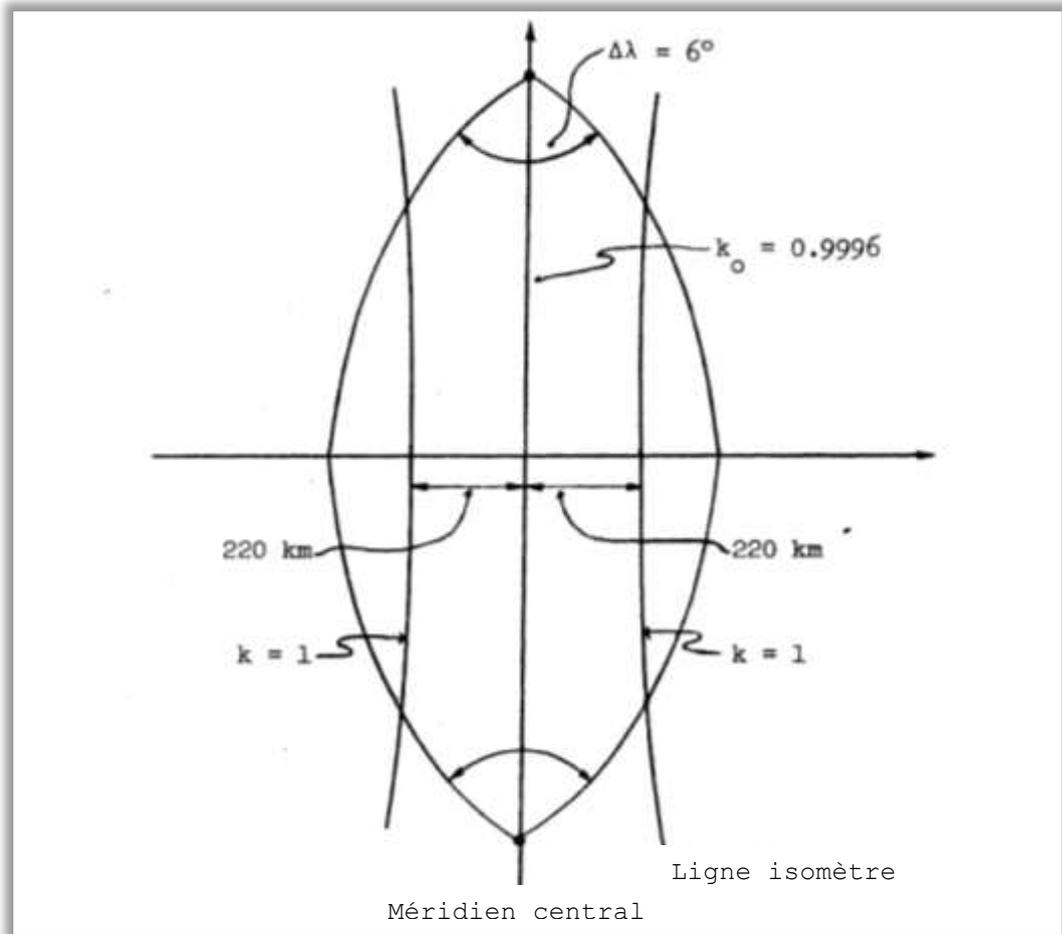


Illustration du facteur d'échelle dans un fuseau UTM [5].

Échelle d'une ligne géodésique

C'est une sorte de valeur moyenne \bar{k} de l'altération linéaire pour une ligne géodésique. Elle permet de calculer la différence entre la longueur de la géodésique (S) et celle de sa projection (s). On peut par exemple utiliser la formule de Bomford (1962) :

$$\bar{k} = 1 + \frac{x_u^2}{6N\rho} \cdot \left(1 + \frac{x_u^2}{36N\rho} \right)$$

$$x_u^2 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

avec N et ρ les rayons de courbure principaux de l'ellipsoïde, calculés à la latitude $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$

Convergence des méridiens

La quantité γ désigne ici le gisement de l'image du méridien (dont la direction est celle du Nord Géographique), c'est à dire l'angle mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre entre l'axe Y de la projection et l'image du méridien.

Formule générale pour la Mercator Transverse

Formule exacte à 0,01" près jusqu'à 3° de longitude de part et d'autre du méridien central

$$\gamma \approx (\lambda - \lambda_0) \sin(\varphi) \left(1 + \frac{(\lambda - \lambda_0)^2 \cos^2(\varphi)}{3} (1 + 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon^4) + \frac{(\lambda - \lambda_0)^4}{15} \cos^4(\varphi) (2 - \tan^2(\varphi)) \right)$$

avec $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos^2(\varphi)$

Les algorithmes de toutes les projections utilisées en France peuvent être téléchargés sur le site Internet de l'IGN, à la page <http://geodesie.ign.fr/index.php?page=algorithmes>

Paramètres des projections UTM sur les territoires français :

Nom	UTM Sud fuseau 53	UTM Sud fuseau 54	UTM Nord fuseau 20	UTM Nord fuseau 22 étendu	UTM Sud fuseau 42	UTM Sud fuseau 38	UTM Nord fuseau 21	UTM Sud fuseau 40
Zone d'application	Entre 0° et -80° de latitude sud Entre 132° et 138° de longitude est	Entre 0° et -80° de latitude sud Entre 138° et 144° de longitude est	Entre 0° et +80° de latitude nord Entre 60° et 66° de longitude ouest	Entre 0° et +80° de latitude nord Entre 48° et 55° de longitude ouest	Entre 0° et -80° de latitude sud Entre 66° et 72° de longitude est	Entre 0° et -80° de latitude sud Entre 42° et 48° de longitude est	Entre 0° et +80° de latitude nord Entre 54° et 60° de longitude ouest	Entre 0° et -80° de latitude sud Entre 54° et 60° de longitude est
Territoire concerné	Terre Adélie	Terre Adélie	Martinique, Guadeloupe, Saint-Martin et Saint-Barthélémy	Guyane française	Îles Kerguelen	Mayotte	Saint-Pierre-et-Miquelon	La Réunion
Repère de référence géodésique associé	RGTAAF07	RGTAAF07	Tous	CSG 1967 (IGN 1995) RGFG95	Kerguelen K0 RGTAAF07	Tous	SPM 1950 RGSPM06	RGR92
Latitude origine	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°
Longitude origine ou méridien central de la projection	+135° (est de Greenwich)	+141° (est de Greenwich)	-63° (ouest de Greenwich)	-51° (ouest de Greenwich)	+69° (est de Greenwich)	+45° (est de Greenwich)	-57° (ouest de Greenwich)	+57° (est de Greenwich)

E_o	500 000 m	500 000 m	500 000 m	500 000 m	500 000 m	500 000 m	500 000 m	500 000 m
N_o	10 000 000 m	10 000 000 m	0 m	0 m	10 000 000 m	10 000 000 m	0 m	10 000 000 m
k_o	0.9996	0.9996	0,9996	0,9996	0.9996	0.9996	0,9996	0.9996

Cas particulier de la Guyane française

En théorie la Guyane française s'étend sur deux fuseaux UTM : le fuseau 21 et le fuseau 22. Pour des raisons de commodité, l'IGN recommande l'utilisation du seul fuseau 22 étendu, ce qui oblige à utiliser des formules à un développement limité d'ordre supérieur aux formules usuelles.

Projection Gauss-Laborde Réunion

Cette projection cylindrique locale conforme a été adoptée pour le calcul de la triangulation exécutée par l'IGN en 1948 ainsi que pour l'établissement de la carte au 1:50000 correspondante. C'est une double projection conforme :

- 1) de l'ellipsoïde international sur la sphère de courbure moyenne pour la latitude de 21° 07' Sud.
- 2) de la sphère sur le plan sans coefficient de réduction d'échelle.

Constantes de la représentation :

	Gauss Laborde
Zone d'application	Ile de la Réunion
Ellipsoïde	International (Hayford 1909)
Latitude origine	21° 07' S
Longitude origine	55° 32' E
E_0	160 000 m
N_0	50 000 m
k_0	1

Elle est associée au repère de référence géodésique « Piton des neiges »

REPRÉSENTATIONS STÉRÉOGRAPHIQUES

Un seul territoire français, la Terre-Adélie (en Antarctique), utilise ce type de projection.

Projection Stéréographique Polaire Sud Terre-Adélie

La projection stéréographique polaire sud Terre-Adélie a été spécialement définie pour ce territoire.

Toutes les anciennes triangulations sont associées à cette projection.

Deux définitions (équivalentes) existent :

	Définition "sécante"	Définition "tangente" avec facteur d'échelle
Zone d'application	0° à -80° de latitude sud	0° à -80° de latitude sud
Latitude origine	90° sud	90° sud
Longitude origine ou méridien central de la projection	140° est	140° est
Eo	300 000 m	500 000 m
No	200 000 m	-2 299 363.482 m
ko	-	0.960272946
Latitude du parallèle d'échelle conservée (automécoïque)	67° sud	-

Formulaire

Les formules sont publiées sur le site de l'IGN :

<http://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/algorithmes/alg0069.pdf> et

<http://geodesie.ign.fr/contenu/fichiers/documentation/algorithmes/alg0070.pdf>

LE MOT DE LA FIN

« Observons un planisphère réalisé selon la méthode de Gerhard de Kremer : l'Islande y occupe une place de choix, visiblement plus grande qu'un pays comme la Côte d'Ivoire alors qu'elle est en réalité trois fois plus petite ; la Norvège occupe sur le papier un espace supérieur au Pérou, pourtant beaucoup plus grand. Le plus impressionnant reste la taille phénoménale affichée par le Groenland, plus généreuse que l'ensemble de l'Amérique du Sud, quand sa superficie réelle est huit fois inférieure à celle-ci !

Cette disproportion n'a pas empêché le système de connaître à terme un succès fou, au point d'influencer toute la cartographie moderne. Ceci pour la simple raison que la trouvaille de Mercator arrive à point nommé, en pleine période d'expansion maritime, et permet aux pilotes et aux explorateurs un moyen plus commode d'appréhender l'espace et de tracer leurs routes.

Depuis que la Terre est ronde et que les cartographes s'échinent à la représenter sur le papier, ils butent tous sur le même problème : comment reproduire à plat une sphère (qui par définition n'est pas une surface développable) sans trahir la réalité ? Il n'y a, hélas, aucune réponse satisfaisante, ça ne marche tout simplement pas. Ce déprimant constat étant posé, la tâche des scientifiques consiste, depuis deux millénaires, à imaginer la moins mauvaise solution. D'où une quête sans fin, celle de la projection optimale, sinon idéale... »

Extrait de « Trouver le nord » par Olivier Le Carrer [7]

Bibliographie

[1]	« Éléments de Géodésie - Notions fondamentales - Applications classiques », Formation donnée à l'École Spéciale des Travaux Publics, Cycle T2, G. Canaud, 2017
[2]	http://geodesie.ign.fr/index.php?page=documentation
[3]	« GPS for Land Surveyors – Fourth Edition », Jan Van Sickle, 2015
[4]	« GPS satellite surveying – Fourth edition », Alfred Leick, Lev Rapoport, Dmitry Tatarnikov, 2015
[5]	« Conformal map projections in geodesy – UNB Lecture Notes 37 », E. J. Krakiwsky, 1973
[6]	« Free software helps map and display data », EOS Trans. AGU, 72, 441, Wessel, P. and W. H. F. Smith, 1991
[7]	« Trouver le nord et autres secrets d'orientation des voyageurs d'autrefois », Olivier Le Carrer, 2016