

En complément sur l'arrêté de 2003, quelques éclairages sur les erreurs de mesure et leur évaluation

1- Où sont les erreurs de mesure ?

Nous côtoyons deux grandes classes de données numériques, les nombres entiers (p. ex. lorsqu'on va dénombrer des objets), et les nombres dits « réels » (terme consacré en mathématiques), qui peuvent avoir un nombre indéterminé de chiffres derrière la virgule.

Lorsqu'on procède à la mesure d'une grandeur, si celle-ci est un dénombrement – avec donc un nombre entier comme résultat attendu – il est tout à fait possible de pouvoir garantir ce résultat sans aucune erreur. Par contre, lorsque la mesure se traduit par un nombre « réel » (p. ex. mesure de longueur, d'angle, etc.), il est impossible de n'avoir aucune erreur sur une valeur mesurée. Une mesure peut toujours être associée à sa « barre d'erreur » (terme précisé plus loin).

Une grandeur peut faire l'objet de mesures de précisions très diverses. Par exemple pour mesurer une distance de l'ordre de 10 m :

- *Au double pas, précision de l'ordre de quelques dm ;*
- *Avec un mètre ruban, de quelques cm ;*
- *Avec un tachéomètre de géomètre, de quelques mm ;*
- *Avec un interféromètre laser, de quelques microns.*

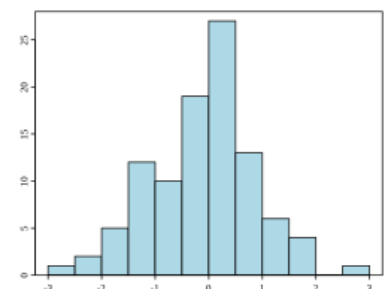
Et la précision du procédé de mesure se mélange encore avec les conditions de terrain (sol de bâtiment bien plat ou au contraire terrain naturel bosselé, etc.), et avec la matérialisation des points extrêmes (quelques cm pour une croix peinte au sol, quelques 0.01 mm pour l'usinage de grande précision d'un centrage forcé.

Si maintenant nous cherchons le sens à donner au terme « barre d'erreur », nous devons nous référer aux termes officiels : exactitude, précision, fidélité, justesse, écart-type, espérance mathématique, variance, etc., nous y renvoyons le lecteur (p. ex. le vocabulaire international de métrologie du BIPM, et quelques aspects au §5).

C'est une réalité absolue : toute mesure a une erreur !

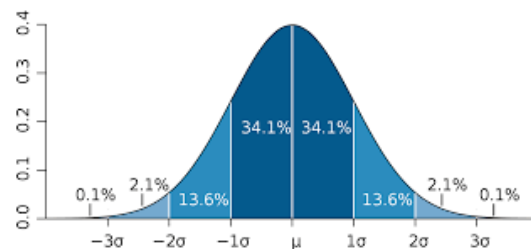
2- Et à quoi ressemblent ces erreurs ?

Le point capital à introduire à ce stade, c'est le fait que pratiquement toutes les erreurs obéissent à des lois statistiques actuellement bien documentées. Si on procède à beaucoup de mesures d'une même grandeur, avec un procédé de mesure compatible avec la précision recherchée, et si on en trace l'histogramme, on obtient une figure du type ci-contre, ici centrée sur 0 : en abscisses, les valeurs trouvées regroupées par tranches, en ordonnées, le nombre de ces valeurs dans une tranche.



(source : Wikipedia)

Et lorsqu'on multiplie encore bien davantage le nombre de mesures, on va trouver presque toujours une répartition des valeurs mesurées qui suit approximativement la courbe suivante, dite de Laplace-Gauss, ou Loi Normale. Une telle courbe est caractérisable par son écart-type noté σ , proche de la moitié de la largeur de la courbe à mi-hauteur, et par l'abscisse de son maximum μ , correspondant à la fois à la valeur mesurée la plus probable et à l'espérance mathématique des mesures. La moyenne des mesures répétées doit tendre vers cette valeur. Dans l'image ci-contre, chaque bande colorée a la largeur d'un écart type.



(source : Wikipedia)

Après une série de mesures, on peut calculer la moyenne, et l'écart-type que l'on assimilera parfois à la « précision » des mesures. Dans notre exemple, notre série de mesures de distances de 10 m effectuées avec un ruban étalonné (lues au mm) pourra nous donner une précision calculée de 1 cm. Ça se traduira par le fait que près de 68% des mesures différeront de la moyenne de moins de 1 cm. Mais 4% des mesures, en moyenne, pourront s'en écarter de 2 cm ou plus, comme on le constate sur la courbe... Et c'est le point dur, et en pratique assez contre-intuitif de la réalité.

Avec une précision de 1 cm, il est normal que quelques mesures s'écartent de la moyenne de 2 ou 3 cm !

3- Peut-on légitimement fixer une tolérance à des erreurs de mesure ?

La notion de tolérance est subjective. En théorie, un résultat très éloigné de la moyenne peut se rencontrer, même si la probabilité d'occurrence devient extrêmement faible. Pour illustrer ce point, nous pouvons imaginer le débit d'un cours d'eau jusqu'à une crue : une mesure très peu probable n'est pas forcément synonyme de faute. En pratique, il est courant de considérer que, au-delà d'un certain seuil de distance à la moyenne, on va rejeter la mesure, la considérer comme faute grossière. Et des vraies fautes grossières, parfois nous en rencontrons aussi en pratique (point mal identifié p. ex.), toutefois elles ne rentrent pas dans le champ d'une erreur normale sur une mesure. Mais il est important de dire que ce seuil, quel que soit sa valeur, est parfaitement subjectif et arbitraire, même si ce qualificatif heurte souvent le sens commun. Les choix les plus courants sont $2,7 \sigma$ (tolérance à 99%, probabilité de 1% d'être dépassé), voire 4σ (tolérance à 99,9%, probabilité de 0,1% d'être dépassé). Simplement, il est capital de se souvenir que, quel que soit ce seuil, il peut être dépassé par des mesures rares mais correctes. Et certes, en les éjectant, on ne perturbe que peu la moyenne, mais ce sera toujours une démarche infondée en théorie.

La notion de tolérance, entièrement subjective, ne repose sur aucune base fiable.

4- Quid du « modèle standard » de l'arrêté de 2003 ?

Ce modèle a été calculé pour des lots de mesures de contrôle de tailles allant de quelques dizaines à quelques centaines de points. Afin d'éviter l'incompréhension fréquente liée à l'usage de termes liés aux statistiques, il n'en utilise aucun. Et les deux seuils T1 et T2 évoqués correspondent à une modélisation simple d'une gaussienne, T2 pouvant être assimilé à une tolérance. Il s'agit d'une simple facilité à disposition des rédacteurs d'un cahier de charges. Avec le temps, il a souvent été compris comme une norme à respecter, et il n'en est rien : **ce n'est qu'une des innombrables possibilités existantes pour formaliser les conditions de contrôle d'un ensemble de points faisant l'objet d'un lever.**

En particulier, il n'est pas adapté à des grands nombres de points, comme ceux des levers laser ou de la corrélation haute densité en photogrammétrie (millions, milliards de points...). Quand on souhaite s'adapter à de très gros effectifs de points contrôlés, la démarche la plus évidente (mais ce n'est pas la seule...) est la suivante :

- Considérer que les écarts ont toutes les raisons d'obéir à une loi Normale (c'est une position par défaut, qui peut s'avérer inadaptée, même si c'est rare¹),
 - Établir l'histogramme des écarts en position obtenus sur les points contrôlés,
 - Utiliser les tests statistiques disponibles dans de nombreuses bibliothèques techniques pour évaluer (i) l'écart-type σ obtenu, et (ii) la fiabilité de cet écart-type σ , ceci étant directement lié à la modélisation par une loi Normale.
- **On peut alors définir la classe de précision librement à partir de cet écart-type noté σ . On peut par exemple la prendre égale à ce σ s'il est jugé très bien déterminé, à 1.5σ s'il l'est moins bien, voire encore davantage. Il s'agit là du libre choix du rédacteur du cahier de charges.**
- **On peut très bien aussi ne fixer qu'une seule forme de tolérance stricte, par exemple à 10σ , excluant tout écart au-delà de ce seuil qui correspond à une probabilité infinitésimale.**

5- Quelques compléments : Exactitude, justesse & erreurs systématiques

Jusqu'à présent, nous avons étudié les erreurs de mesures de manière intrinsèque, c'est-à-dire par rapport aux mesures elles-mêmes. En répétant les mesures, en en calculant la moyenne et écart-type, nous pouvons étudier leur dispersion et nous faire une première idée de leur qualité. Les métrologues parlent de fidélité de mesures. Mais si nous comparons nos résultats avec d'autres, obtenus avec d'autres instruments, ou selon d'autres méthodes, la comparaison sera-t-elle satisfaisante ?

*L'exactitude d'une mesure correspond à l'étroitesse de l'accord entre une valeur mesurée et une valeur vraie d'une grandeur que l'on désire mesurer. Elle se décompose en (i) la **justesse** de mesure, ou l'« étroitesse de l'accord entre la moyenne d'un nombre infini de valeurs mesurées répétées et une valeur de référence » selon la définition du BIPM, et (ii) la **fidélité** de mesure, ou l'« étroitesse de l'accord entre les indications ou les valeurs mesurées obtenues par des mesurages répétés du même objet ou d'objets similaires dans des conditions spécifiées » selon le BIPM.*

Si nous disposions de la valeur vraie de la mesure, nous pourrions, par différence, calculer l'exactitude. Malheureusement, si cette valeur vraie existe toujours, elle est aussi toujours inconnue. Par conséquent, l'exactitude est-elle aussi inconnue. Comment l'estimer au mieux ?

Si la valeur vraie d'une mesure existe, elle est toujours inconnue. De ce fait, l'exactitude est elle aussi toujours inconnue.

¹ Par exemple, lors d'un chaînage sur le terrain, les petits écarts à la ligne droite sont probablement gaussiens, mais le résultat n'est pas, l'écart mesuré est forcément positif.

Au-début de ce document nous parlions de différentes méthodes pour mesurer une distance de 10 m. Pour estimer l'exactitude du distancemètre d'un tachéomètre, ne pouvons-nous pas nous appuyer sur des interféromètres laser ? La précision – ou plus rigoureusement la fidélité – du second est tellement meilleure que celle du premier qu'elle peut être négligée. On peut alors comparer nos mesures avec d'autres considérées comme référence. Et c'est exactement ce principe qui est appliqué par les fabricants d'instruments pour qualifier leurs produits, et ce qui est un principe fondamental en métrologie. À défaut de quantifier l'exactitude d'une mesure, on en estime la justesse en comparant les mesures avec une valeur de référence, de meilleure classe de précision.

Pour s'approcher de l'exactitude, on estime la justesse des mesures par rapport à des valeurs de référence de classe de précision bien meilleure

On voit que la justesse nécessite des données de référence, en plus de nos mesures. En ce sens il s'agit d'une validation extrinsèque. Et c'est la raison pour laquelle elle est plus difficile à estimer. Démontrer que les mesures sont justes, c'est démontrer que la moyenne des mesures est à la bonne place, qu'il n'y a pas d'erreurs systématiques (biais de mesures).

Souvent, cette justesse est validée par le constructeur, en laboratoire, et sur le terrain, on s'assure de bien respecter le mode opératoire par exemple :

- En nivelant avec un niveau dont la collimation est régulièrement contrôlée et en respectant des portées égales
- En mesurant les angles avec un tachéomètre bien entretenu, dans les deux positions de la lunette

En faisant contrôler régulièrement ses instruments de mesure, et en appliquant rigoureusement les modes opératoires, on assure la justesse des mesures, c'est-à-dire l'absence d'erreurs systématiques.